Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak

Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 1

Na stronie www przedmiotu
http://users.uj.edu.pl/~golak/zestawyF.html
i/lub
w aplikacji Sylabus
można znaleźć:

- program wykładu
- warunki zaliczenia
- **terminy egzaminu**
- spis polecanej literatury uzupełniającej
- zestawy z zadaniami
- slajdy w wersji PDF
- materiały pomocnicze do wykładu i ćwiczeń

Jak nie marnować czasu na wykładzie z fizyki

Źródło: www.interia.pl

Czym jest fizyka

To najważniejsza nauka przyrodnicza, która zajmuje się badaniem własności materii, oddziaływań jej składników oraz zjawisk w otaczającym nas Wszechświecie

Ważne zastrzeżenie → fizyka bada tylko to, co można zmierzyć.
Jeśli coś daje się zmierzyć, jest wielkością fizyczną !

Co to znaczy „zmierzyć”

Porównać ***ilościowo*** z takimi samymi własnościami innych ciał lub zjawisk.

Pomiar wielkości fizycznej sprowadza się do jej porównania z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę.

W Polsce obowiązuje Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (potocznie zwany Układem SI)

Kluczowa instytucja: Międzynarodowy Komitet Miar i Wag z siedzibą w Sévres pod Paryżem

W Polsce właściwą instytucją jest Główny Urząd Miar z siedzibą w Warszawie

Jednostki Podstawowe Układu SI

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna
metr	**m**	długość
kilogram	**kg**	masa
sekunda	**s**	czas
amper	**A**	natężenie prądu elektrycznego
kelwin	**K**	temperatura
kandela	**cd**	światłość
mol	**mol**	liczność materii

Ze strony Głównego Urzędu Miar

https://www.gum.gov.pl/

„Redefinicja SI - „Stare" a „nowe" SI
Gruntowna „rewolucja" objęła cztery jednostki miar: kilogram, amper, mol i kelwin, jednak zadecydowano o przebudowaniu tekstów wszystkich definicji, tak aby po redefinicji miały jednolitą budowę. Obecnie obowiązujące definicje jednostek miar oraz ich nowe, proponowane brzmienie znajdują się w osobnych zakładkach. Nowe brzmienie definicji zostało ostatecznie sformułowane i zatwierdzone podczas XXVI Generalnej Konferencji Miar, która odbyła się w dniach 13-16 listopada 2018 roku. Nowe definicje jednostek miar zaczną obowiązywać od maja 2019 roku."

Polecam broszurę GUM z oficjalną informacją o zmianach w układzie SI:
https://www.gum.gov.pl/ftp/pdf/Publikacje/Redefinicja_SI_broszura.pdf

Stare intuicyjne definicje jednostek długości i masy przeszły do historii !

https://pl.wikipedia.org/wiki/Metr

1960

https://en.wikipedia.org/wiki/Kilogram

2019

Siedem stałych definiujących układ SI i siedem jednostek określonych przez te stałe

Table 1. The seven defining constants of the SI and the seven corresponding units they define

Defining constant	Symbol	Numerical value	Unit
hyperfine transition frequency of Cs	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	$m\ s^{-1}$
Planck constant	h	$6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant	k	$1.380\ 649 \times 10^{-23}$	$J\ K^{-1}$
Avogadro constant	N_A	$6.022\ 140\ 76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	$lm\ W^{-1}$

skuteczność świetlna

częstotliwość przejścia nadsubtelnego w atomie ^{133}Cs

Precyzyjne definicje jednostek podstawowych poprzez stałe fundamentalne

Przykład dla kilograma

~~Jednostka masy, która jest równa masie międzynarodowego prototypu kilograma przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar w Sèvres.~~

Kilogram, oznaczenie kg, jest to jednostka masy w SI. Jest ona zdefiniowana poprzez przyjęcie ustalonej wartości liczbowej stałej Plancka *h*, wynoszącej $6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$, wyrażonej w jednostce J s, która jest równa kg m^2 s^{-1}, przy czym metr i sekunda zdefiniowane są za pomocą *c* i $\Delta\nu_{Cs}$.

Proponowana definicja, określa jednostkę kg m^2 s^{-1} (jest to jednostka wielkości fizycznych działania i momentu pędu). W połączeniu z definicją metra (m) i sekundy (s) prowadzi to do określenia jednostki masy (kg), wyrażonej przy użyciu wartości stałej Plancka *h*.

1 kg	$(h/6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34})\ s\ m^{-2} \approx 1{,}475\ 521... \times 10^{40}\ h\ \Delta\nu_{Cs}\ c^{-2}$

Przykład dla kilograma c.d.

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34}\, kg\, \frac{m^2}{s} = 6.62607015 \times 10^{-34}\, kg \left(\frac{m}{s}\right)^2 s$$

$$\Rightarrow kg = \frac{h}{6.62607015 \times 10^{-34} \left(\frac{m}{s}\right)^2 s}$$

$$c = 299792458\, \frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{s} = \frac{c}{299792458}$$

$$\Delta\nu_{cs} = 9192631770\, \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{9192631770}{\Delta\nu_{cs}}$$

po podstawieniach

$$kg = \frac{h}{6.62607015 \times 10^{-34} \left(\frac{c}{299792458}\right)^2 \frac{9192631770}{\Delta\nu_{cs}}} =$$

$$= \frac{(299792458)^2\, 10^{34}}{6.62607015 \times 9192631770}\, \frac{h}{c^2\, \Delta\nu_{cs}} \approx 1.4755213997 \times 10^{40}\, \frac{h}{c^2\, \Delta\nu_{cs}}$$

Stałe fundamentalne użyte do budowy kilograma

c= 299792458 m/s
h= 6.62607015 kg*m²/s
Δv_{cs} = 9192631770 1/s

c jest prędkością światła w próżni

Stała Plancka *h* związana jest z faktem, że promieniowanie elektromagnetyczne zachowuje się jak strumień cząstek (fotonów) o masie zero, z których każda posiada porcję (kwant) energii *E* o wartości równej iloczynowi *h* i częstotliwości promieniowania *v*: *E = h*v*

Co to jest ***Δv_{cs}*** ?
Cez (Cs) jest pierwiastkiem chemicznym (grupa 1, okres 6), niezwykle reaktywnym metalem alkalicznym. W przyrodzie występuje w postaci jedynego stabilnego izotopu ^{133}Cs. Oznacza to, że w pojedynczym atomie mamy 55 elektronów na powłokach elektronowych oraz 55 protonów i (133-55= 78) neutronów w jądrze atomowym.

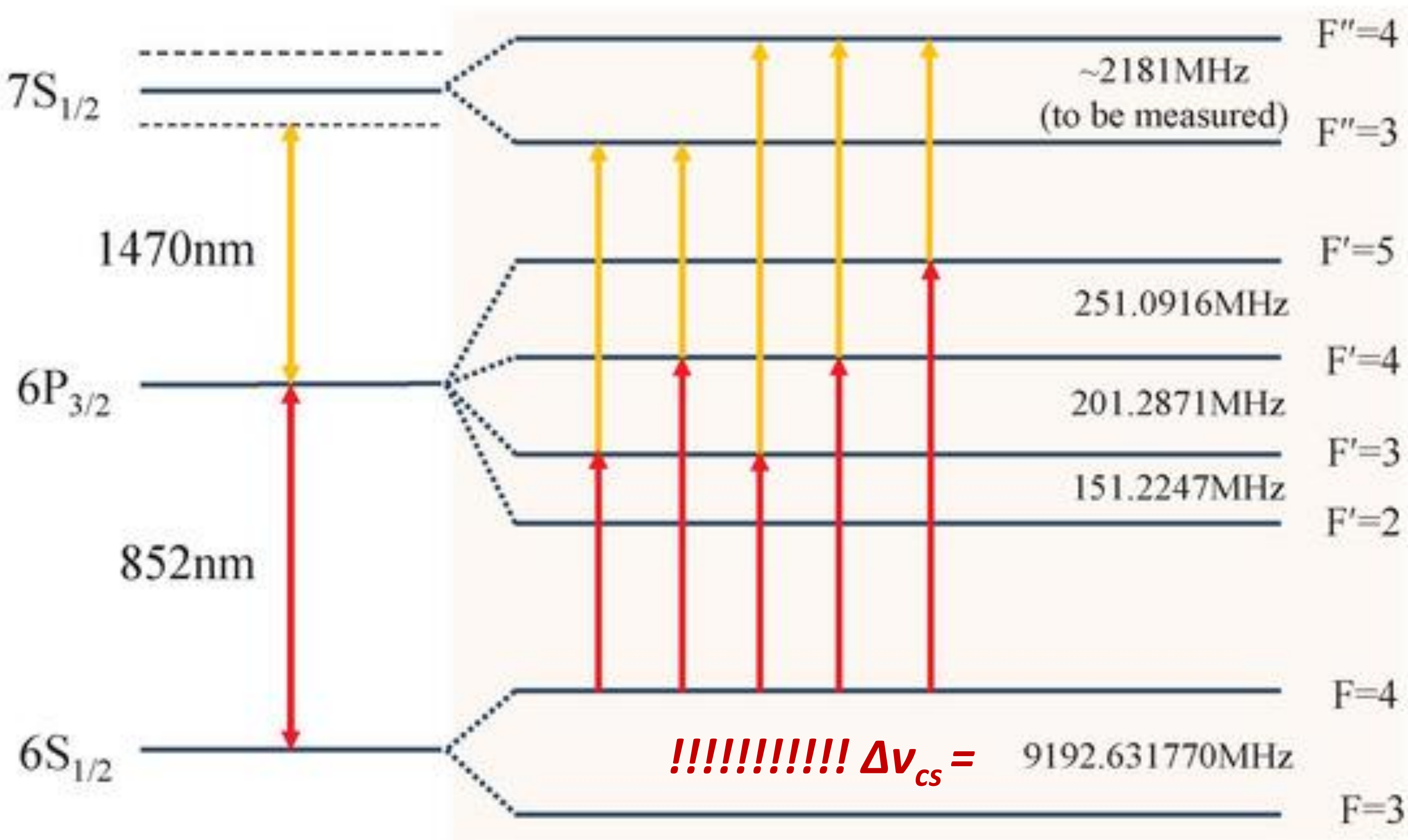
Konfiguracja elektronowa cezu

powłoka	liczba elektronów	
1s	2	
2s 2p	2+6	
3s 3p 3d	2+6+10	
4s 4p 4d	2+6+10	
5s 5p	2+6	[Xe]
6s	1	[Xe] $6s^1$

Poziom $6s^1$ posiada podpoziomy F=3 i F=4. Jest to tzw. *struktura nadsubtelna* spowodowana oddziaływaniem magnetycznego momentu jądra cezu o spinie 7/2 z polem elektromagnetycznym wytworzonym przez elektrony w miejscu jądra

$F = | 7/2 \pm 1/2 |$

Poziomy energetyczne w atomie ^{133}Cs



Przy przejściu elektronu z podpoziomu F=4 na podpoziom F=3 poziomu $6S_{1/2}$ emitowane jest promieniowanie EM o częstotliwości $\nu=\Delta\nu_{cs}$.

Ogólnie różnica energii poziomów ΔE związana jest z częstotliwością promieniowania ν wzorem, w którym występuje stała Plancka: $\Delta E = h\ \nu$

Rysunek z artykułu Y. He et al., Appl. Sci.2020,10, 525; doi:10.3390/app10020525

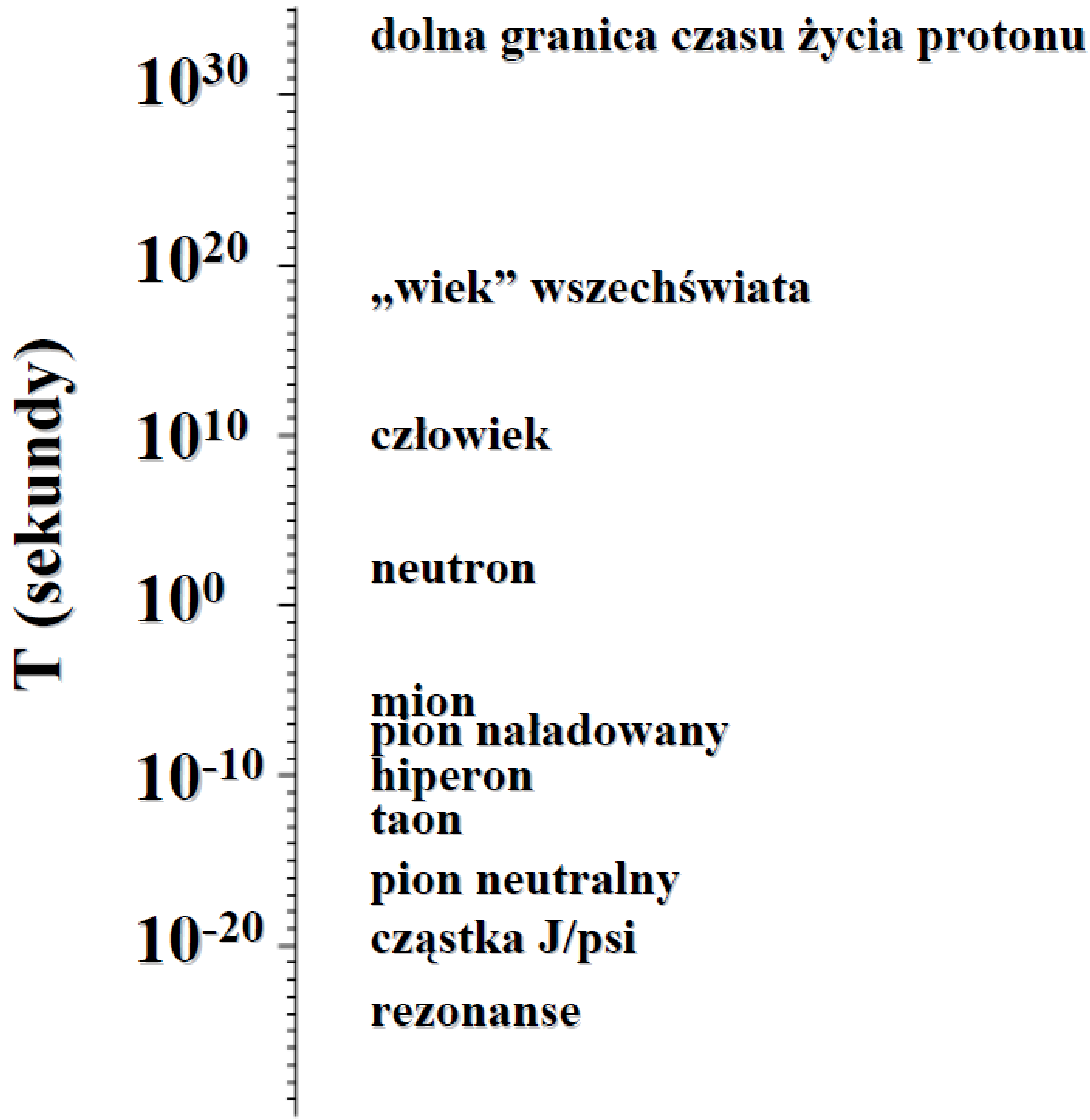
Pełne zrozumienie tych jednostek fizycznych wymaga …
wiedzy z fizyki !

Więcej informacji w broszurkach dostępnych także na mojej stronie:

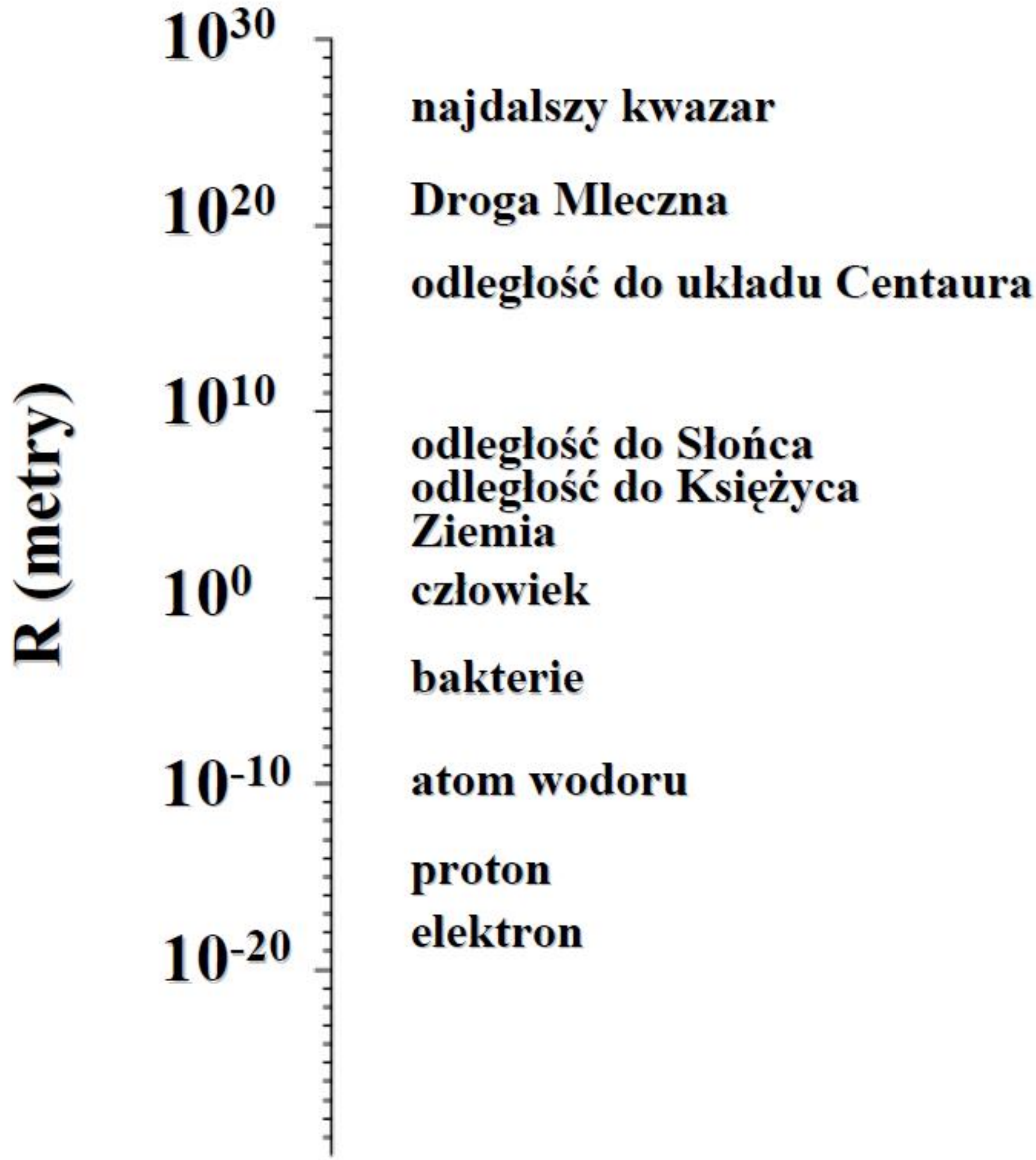
https://www.bipm.org/en/si-download-area/
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/SI-Brochure-9-EN.pdf

https://www.gum.gov.pl/ftp/pdf/Publikacje/Redefinicja_SI_broszura.pdf
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/Redefinicja_SI_broszura.pdf

Świat zjawisk fizycznych



Świat zjawisk fizycznych



Model zjawiska fizycznego

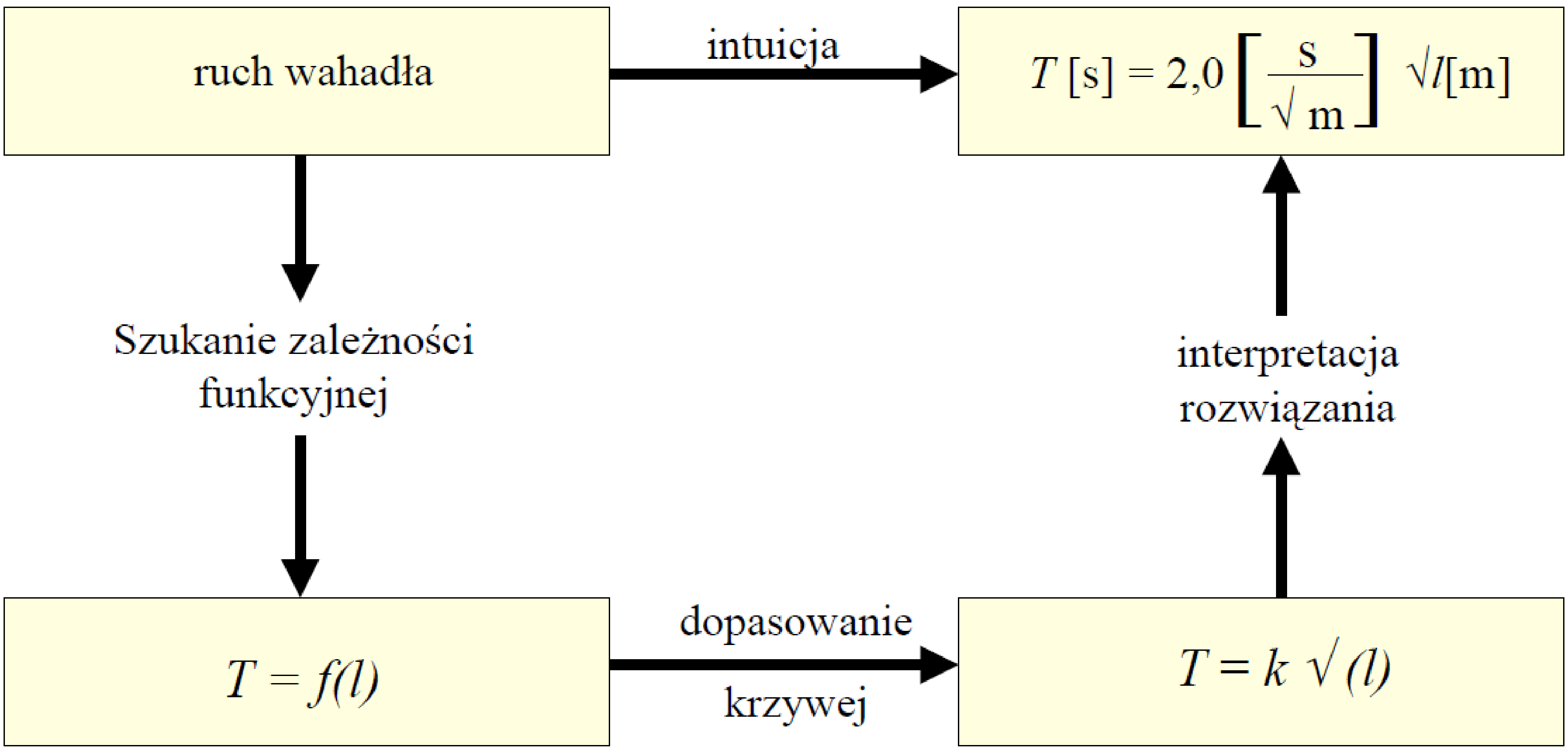
Matematyka jest językiem fizyki zarówno w pracy doświadczalnej, jak i teoretycznej.

Służy do formułowania tzw. ***modeli matematycznych***

Kluczowa rola sensownych (uwzględniających istotę badanego zjawiska) uproszczeń

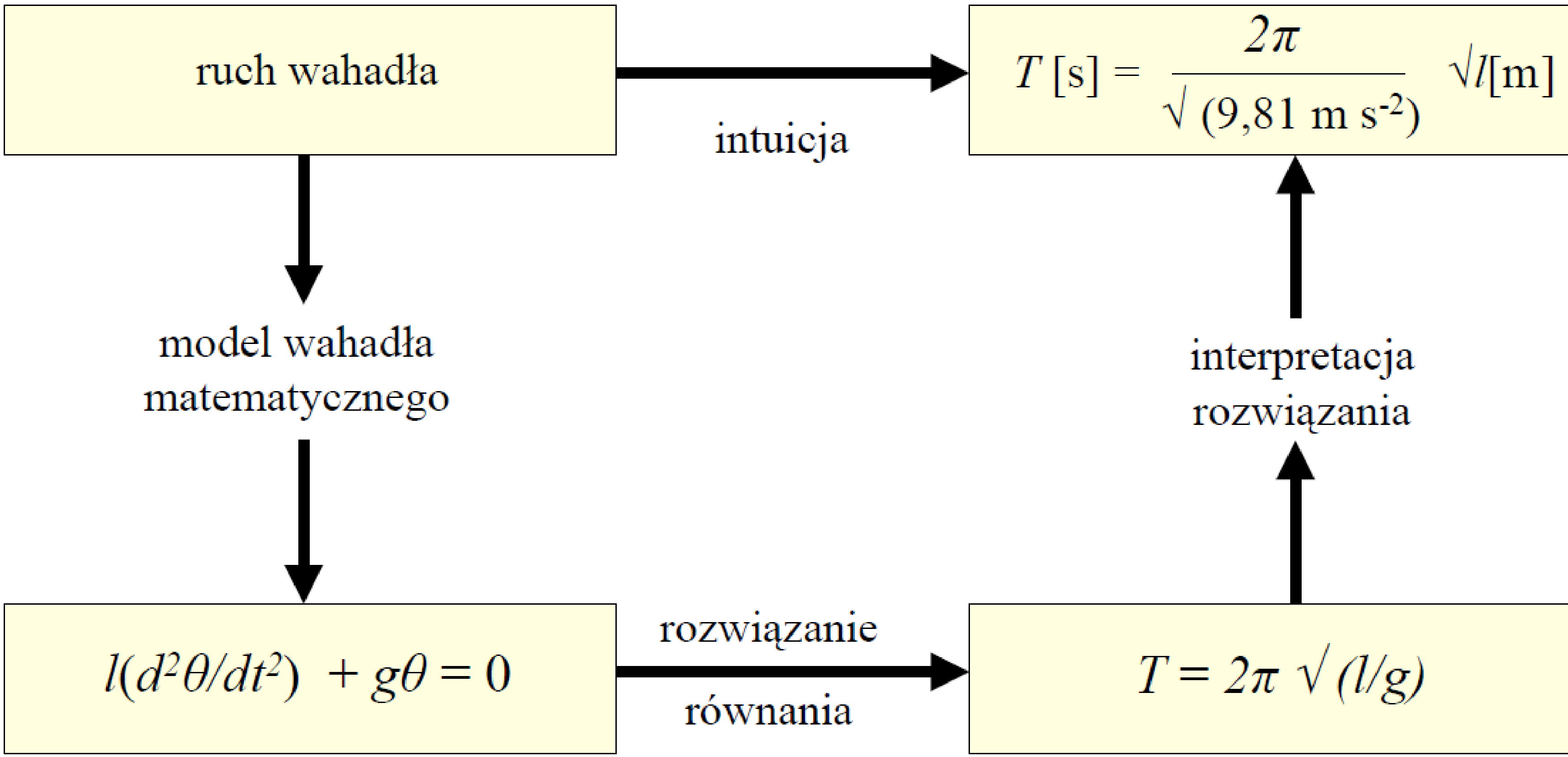
Dobry model wymaga współpracy eksperymentu i teorii.

Model opisowy



A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, Wstęp do Fizyki, PWN, 1984

Model przyczynowy



A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, Wstęp do Fizyki, PWN, 1984

Obserwacja (badamy zjawisko w warunkach naturalnych)

Doświadczenie (badamy zjawisko w warunkach sztucznie stworzonych i poddanych naszej kontroli)

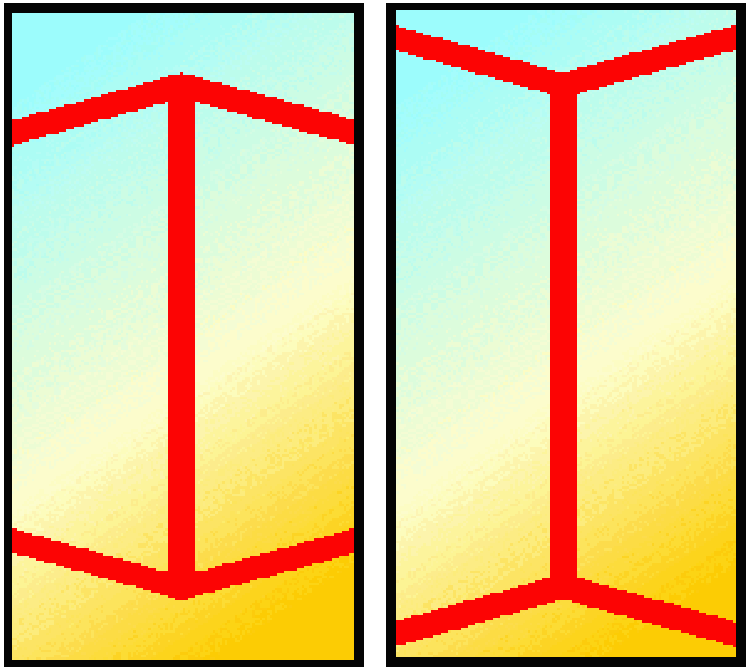
Pomiar (przypisanie wielkości fizycznej pewnej liczby, przez porównanie z jednostką)

Trzeba pamiętać, że
Wszystkie pomiary fizyczne są obarczone ***niepewnością !***

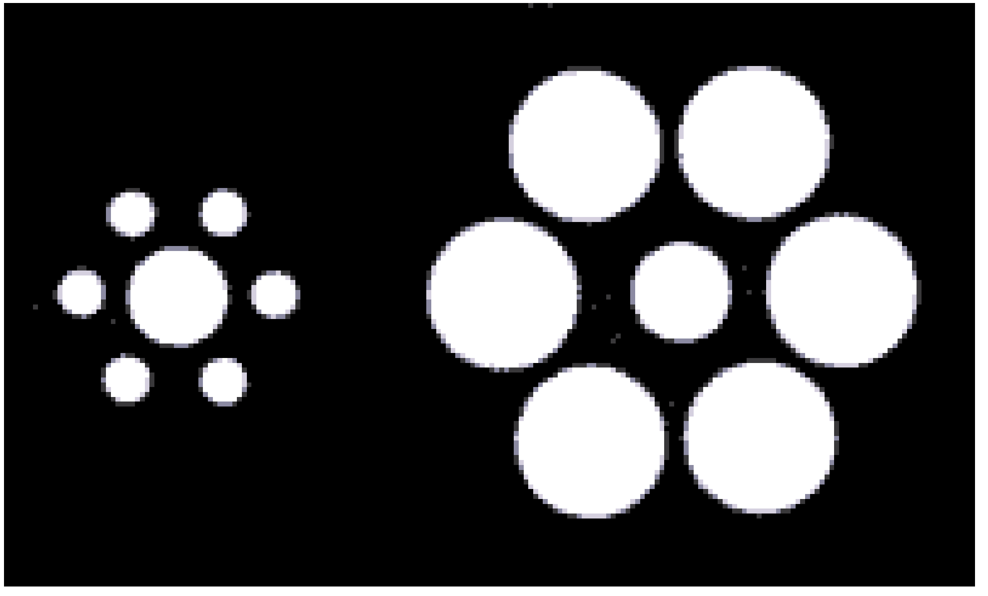
Wynik pomiaru bez oszacowania niepewności pomiarowej jest bezwartościowy.

Wartościowy pomiar wymaga sporego wysiłku, ostrożności i staranności !

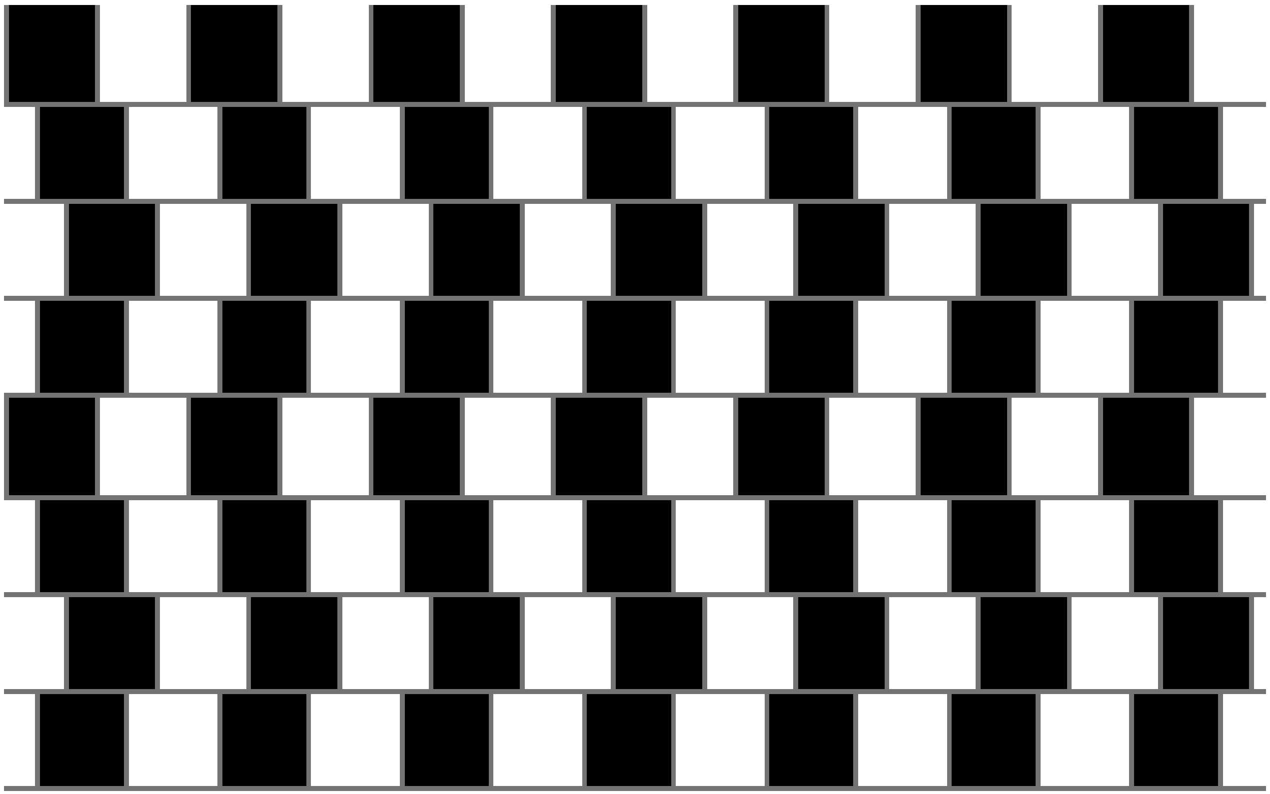
Który z pionowych odcinków jest dłuższy ?



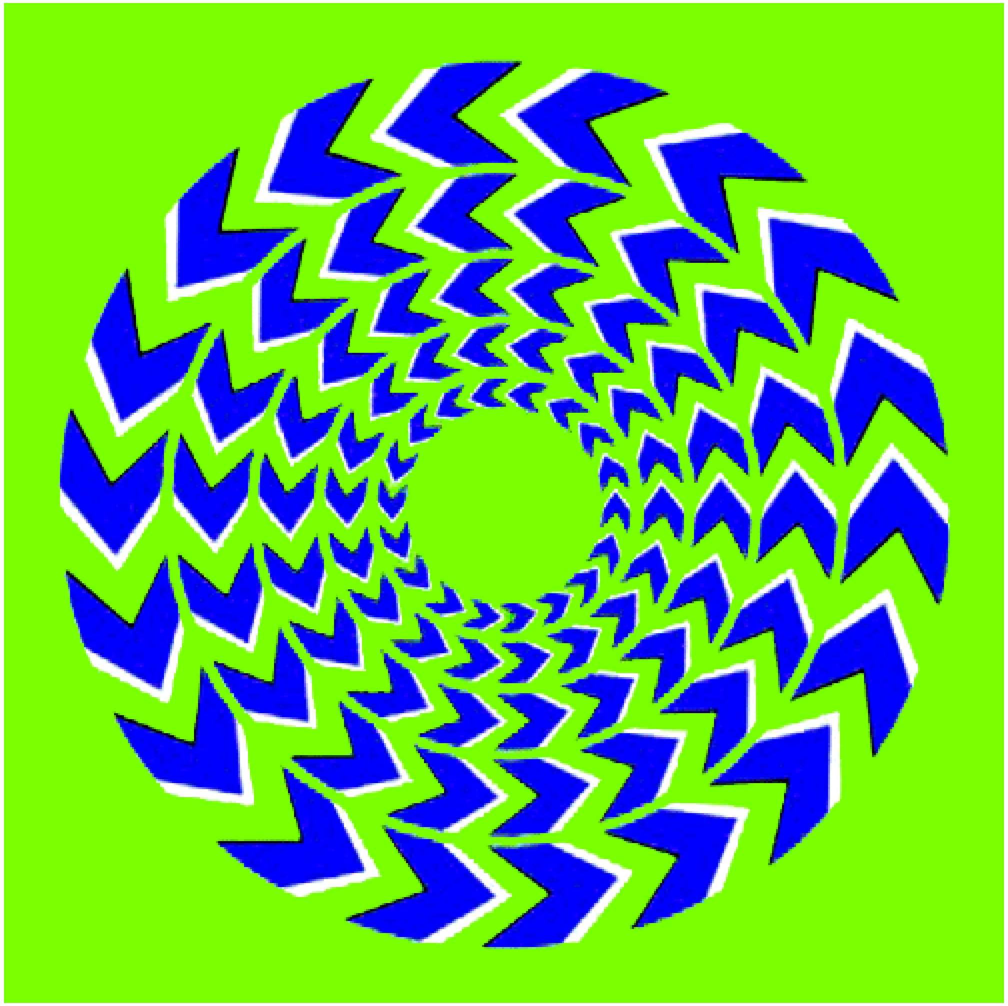
Które z centralnych kół jest większe ?



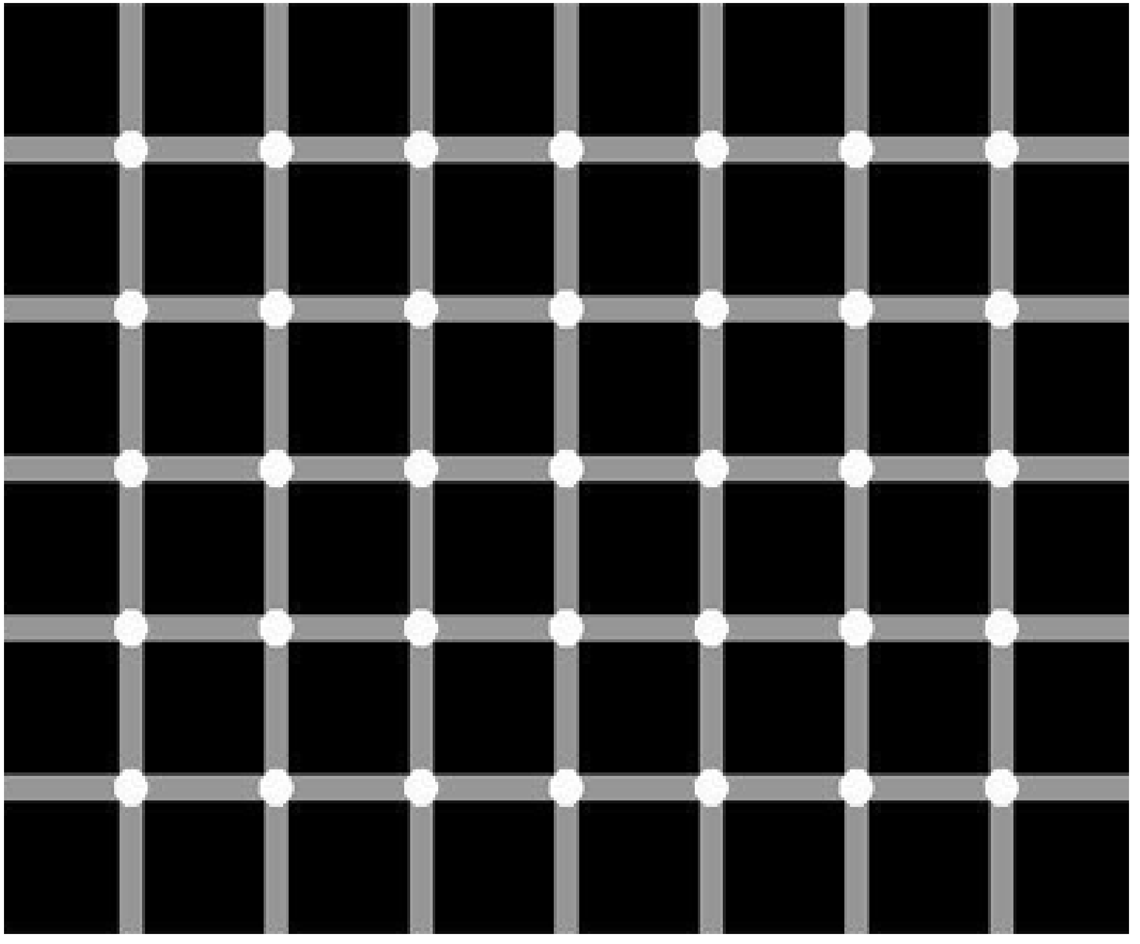
Czy linie są równoległe ?



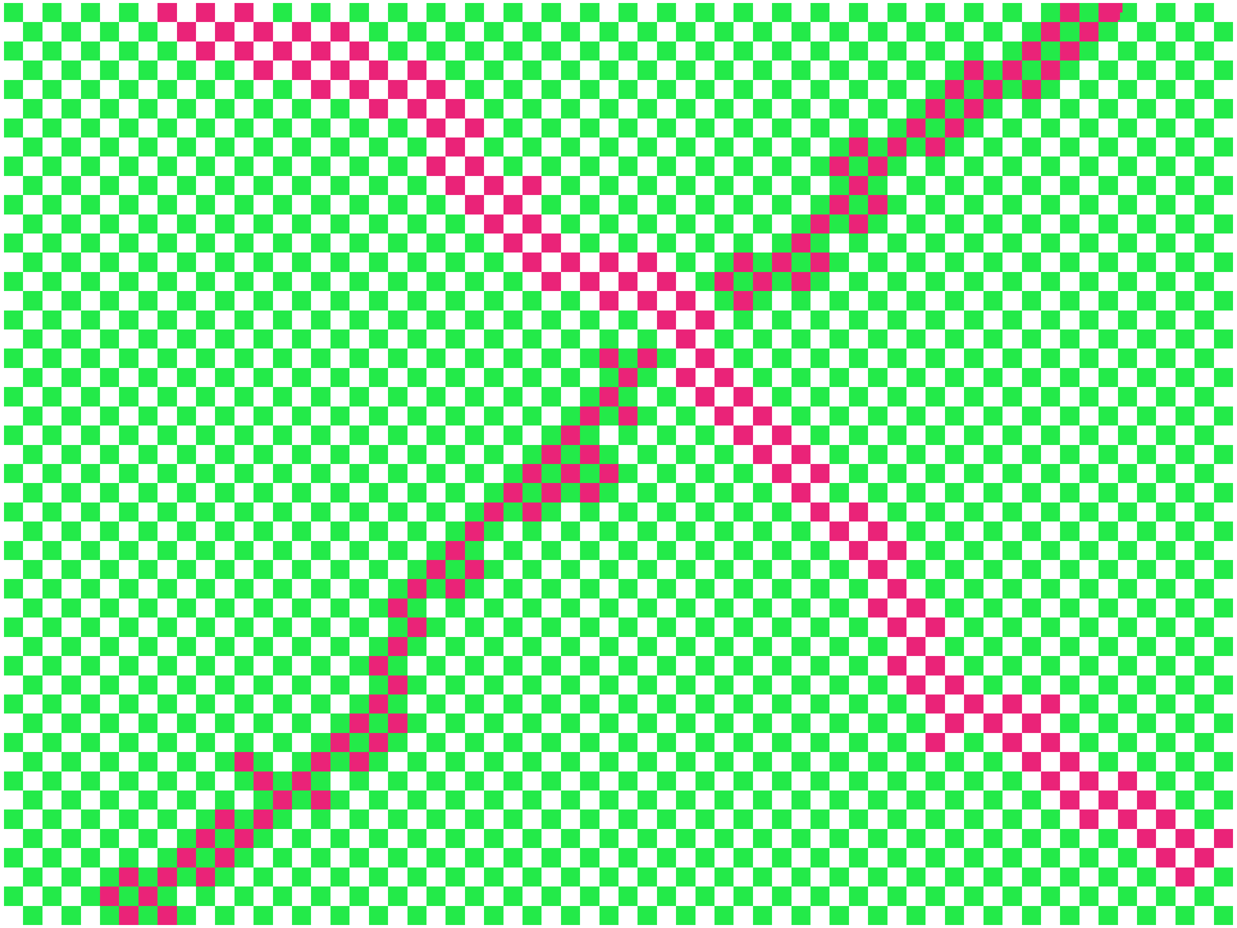
W którą stronę kręcą się elementy obrazka ?



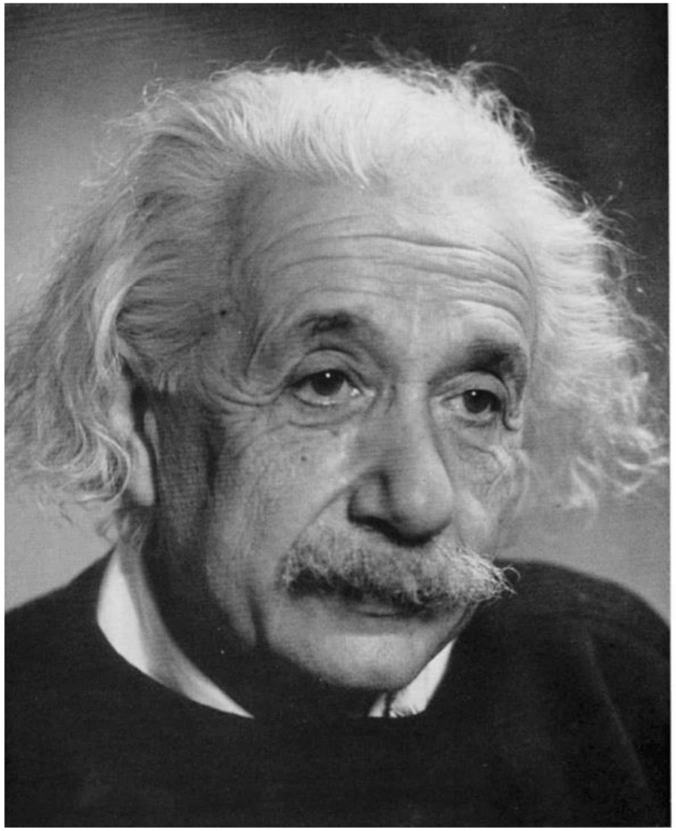
Ile jest czarnych punktów ?



Ile tu odmian różowego ?

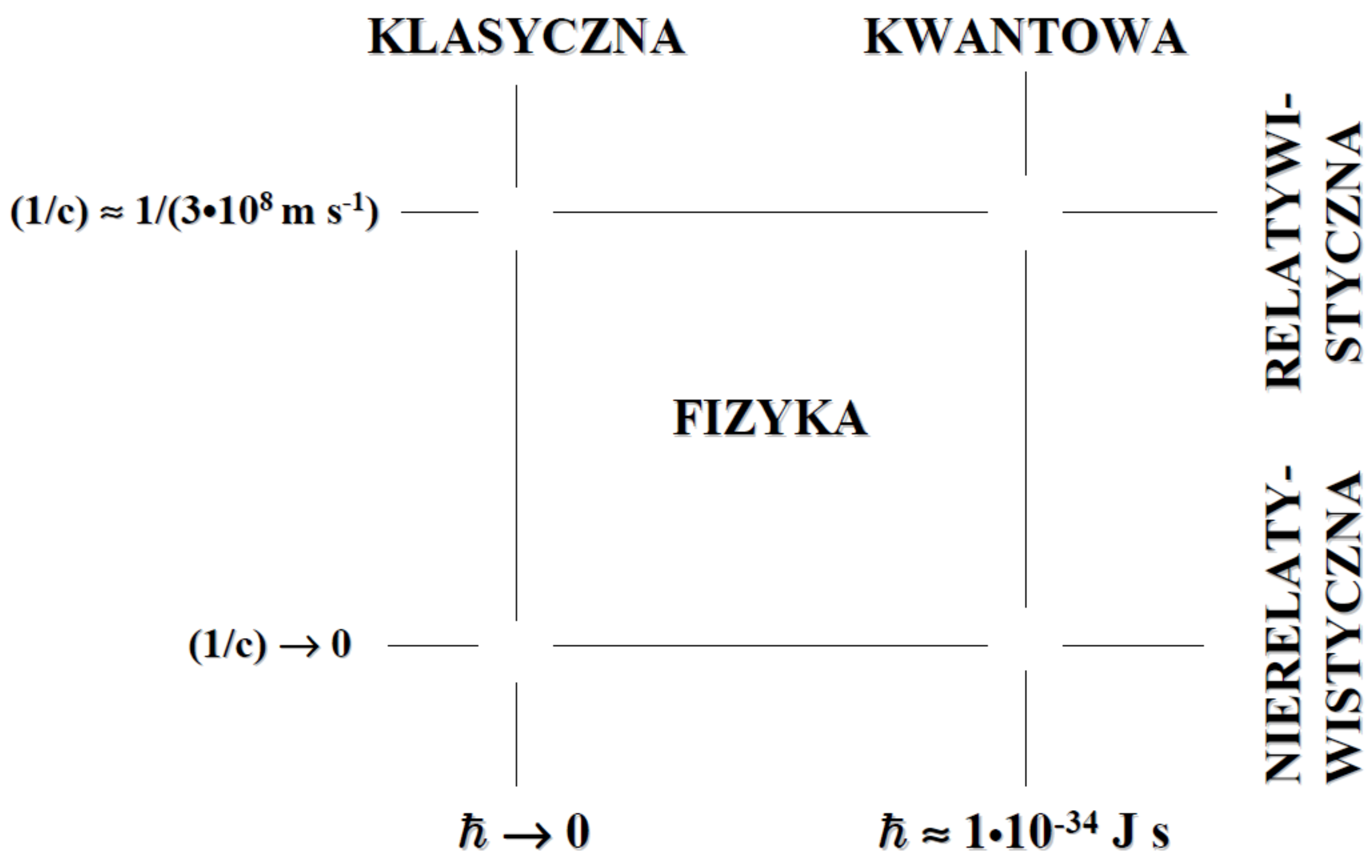


Biorąc pod uwagę wszystkie problemy związane z opisem zjawisk fizycznych, …



Najbardziej niezrozumiałe jest to, że wszechświat można zrozumieć.

Albert Einstein


KLASYCZNA
KWANTOWA
RELATYWI-
STYCZNA
(1/c) ≈ 1/(3•10⁸ m s⁻¹)
FIZYKA
NIERELATY-
WISTYCZNA
(1/c) → 0
ħ → 0
ħ ≈ 1•10⁻³⁴ J s

Fizyka dzieli się na wiele dziedzin

- Fizyka fazy skondensowanej
- Fizyka atomowa
- Fizyka jądrowa
- Fizyka cząstek elementarnych
- Fizyka statystyczna
- Fizyka medyczna
- Biofizyka
- Geofizyka
- Astrofizyka
- Inne ...

Fizyka jest absolutnie niezbędna w komputerowym modelowaniu → GRY KOMPUTEROWE !

W każdej z tych dziedzin potrzebna jest znajomość podstawowych pojęć i wielkości fizycznych.

Takim fundamentem jest ***mechanika*** !

Wielkości skalarne i wektorowe

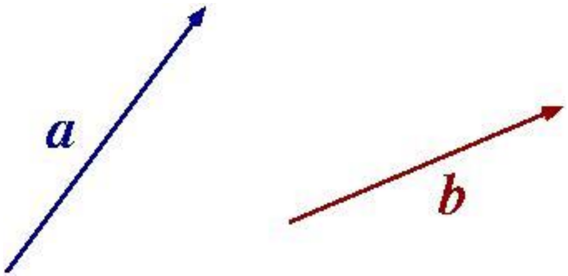
W fizyce potrzebne nam będą zarówno wielkości skalarne (czas, droga, masa, …) , jak i wektorowe (położenie, przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła, natężenie pola elektrycznego, …).

Ze względów praktycznych wielkości wektorowe będą oznaczane strzałką albo wytłuszczonym drukiem:

$$\vec{r} \equiv \boldsymbol{r}$$

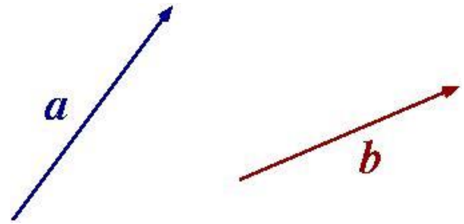
Na następnych transparencjach przypomnę podstawowe wiadomości o wektorach

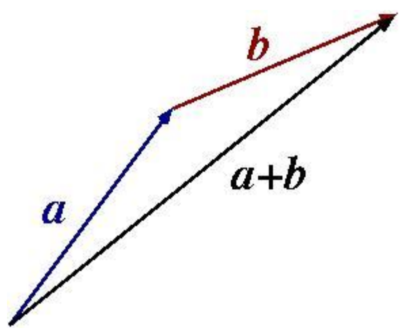
Wielkości wektorowe wymagają podania nie tylko ich wartości, ale także kierunku i zwrotu, a niekiedy dodatkowo punktu przyłożenia. W przestrzeni trójwymiarowej wektory są zwykle reprezentowane przy pomocy skierowanych odcinków. Takie (swobodne) wektory można przesuwać, nie zmieniając ich orientacji przestrzennej.



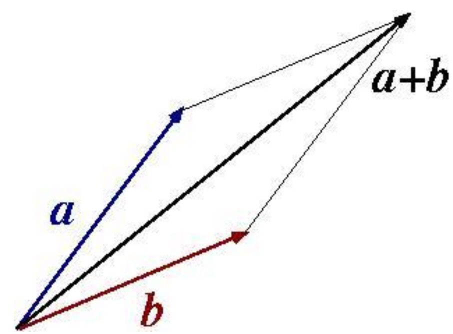
Aby mieć do czynienia rzeczywiście z przestrzenią wektorową (inaczej liniową), należy podać sposób dodawania wektorów oraz ich mnożenia przez liczby (w naszym przypadku liczby rzeczywiste).

Suma wektorów ***a*** i ***b***





Metoda trójkąta



Metoda równoległoboku

Można sprawdzić, że tak określone działanie spełnia warunki przemienności i łączności (***a, b, c*** – dowolne wektory)

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \qquad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

Wektor zerowy

Musimy wskazać wektor zerowy , ***0*** , który spełnia warunek
(***a*** – dowolny wektor)

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

W naszym przypadku będzie to po prostu *odcinek skierowany o zerowej długości.*

Wektor przeciwny do danego wektora

Dla dowolnego wektora, ***a*,** musi istnieć wektor do niego przeciwny , ***a’*** , taki, że

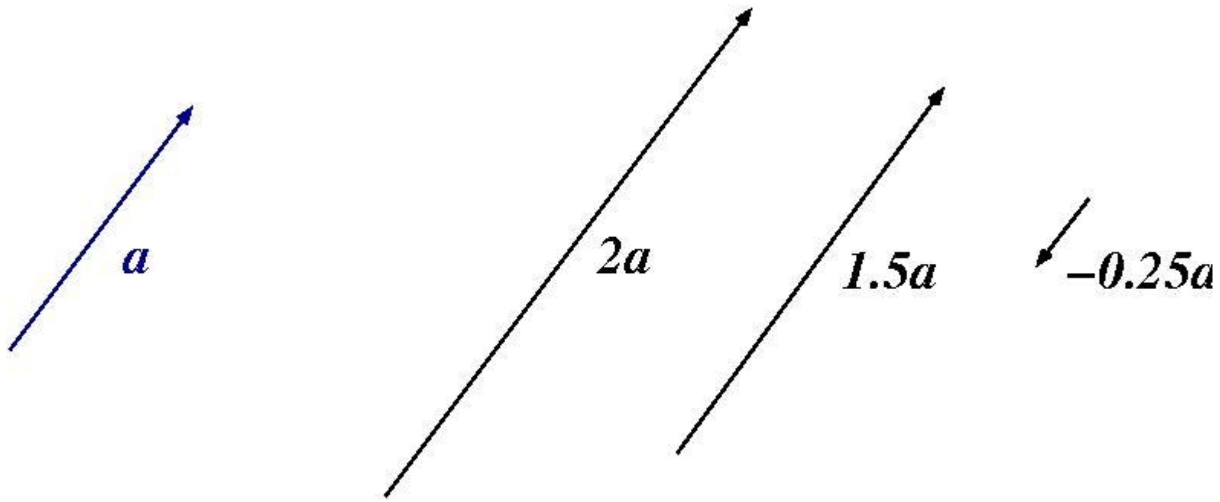
$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{a}'+\vec{a}=\vec{0}$$

W naszym przypadku będzie to po prostu *odcinek skierowany o tej samej długości i tym samym kierunku, co **a**, ale o przeciwnym zwrocie.*

Uwaga: wektor przeciwny do ***a*** oznaczamy zwykle przez ***–a***
odejmowanie wektorów ***a*** i ***b*** należy rozumieć tak

$$\vec{a}-\vec{b}\equiv\vec{a}+(-\vec{b})$$

Mnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą



Odcinek skierowany *k* ***a*** ma ten sam kierunek, co odcinek skierowany ***a*** . Długość *k* ***a*** wynosi *|k|* razy długość odcinka ***a***. Zwrot *k* ***a*** jest taki sam, jak zwrot ***a***, jeśli $k > 0$. Jeśli $k < 0$, odcinek skierowany *k* ***a*** , jest przeciwnie skierowany niż odcinek skierowany ***a***.

Można sprawdzić, że tak określone mnożenie odcinka skierowanego przez liczbę spełnia następujące warunki (***a, b*** – dowolne wektory; *r, s* – dowolne liczby)

$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b},$$

$$(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a},$$

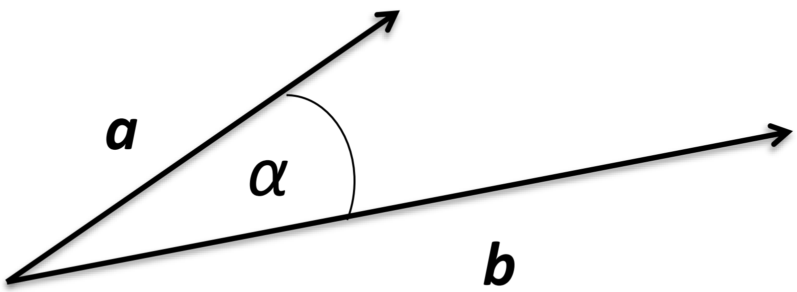
$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a},$$

$$1\vec{a} = \vec{a}.$$

W powyższych wzorach należy odróżnić dodawanie dwóch liczb od dodawania dwóch wektorów oraz mnożenie dwóch liczb od mnożenia wektora przez liczbę !

Iloczyn skalarny dwóch wektorów (liczba !)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,| \cos\alpha$$



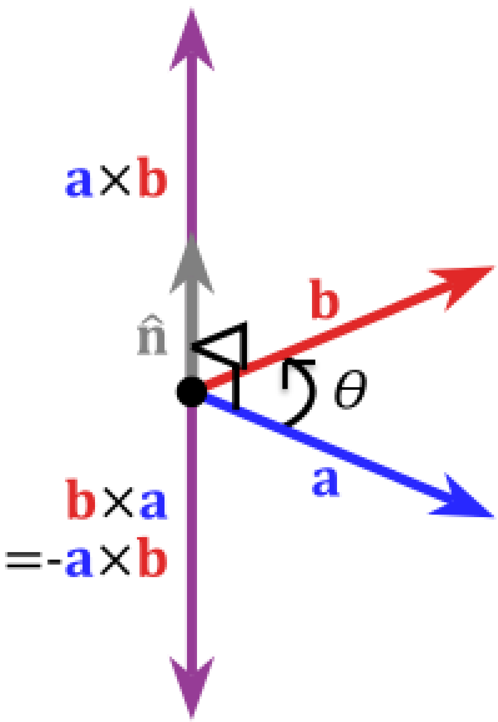
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \equiv \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}\,|^2 \rightarrow |\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}\,|},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów (wektor !)



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Uwagi:

1. Jeśli ***a=0*** lub ***b=0***, to ***c=0***.
2. Jeśli *Θ=0* lub *Θ*=180 stopni, to ***c= 0***.
3. W pozostałych przypadkach

- 180 stopni > *Θ* > *0* (bo inaczej długość ***c*** jest ujemna !)
- ***c*** jest prostopadły do ***a*** i do ***b***
- Zwrot ***c*** określony jest „regułą śruby prawej"

$$\cdot \, |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$$

Własności iloczynu wektorowego

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \ ,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \ \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \ ,$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Pochodne wyrażeń z wektorami

Niech wektory ***a*** i ***b*** zależą od pewnego parametru, *t*.
Nie zawsze musi to być czas.

$$\vec{a}'(t) \equiv \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

pochodna wektora jest wektorem

$$\frac{d\big(f(t)\vec{a}(t)\big)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\vec{a}(t) + f(t)\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$$

pochodna wektora pomnożonego przez funkcję liczbową

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt},$$

pochodna sumy jest sumą pochodnych

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt},$$

wynik jest skalarem

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

wynik jest wektorem i ważna jest kolejność czynników

Teraz umieścimy wektor w układzie współrzędnych kartezjańskich, gdzie będzie reprezentowany przez trójkę liczb (współrzędnych).

To ogromnie ułatwia rachunki !

Wiele równoważnych zapisów wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}\,,$$

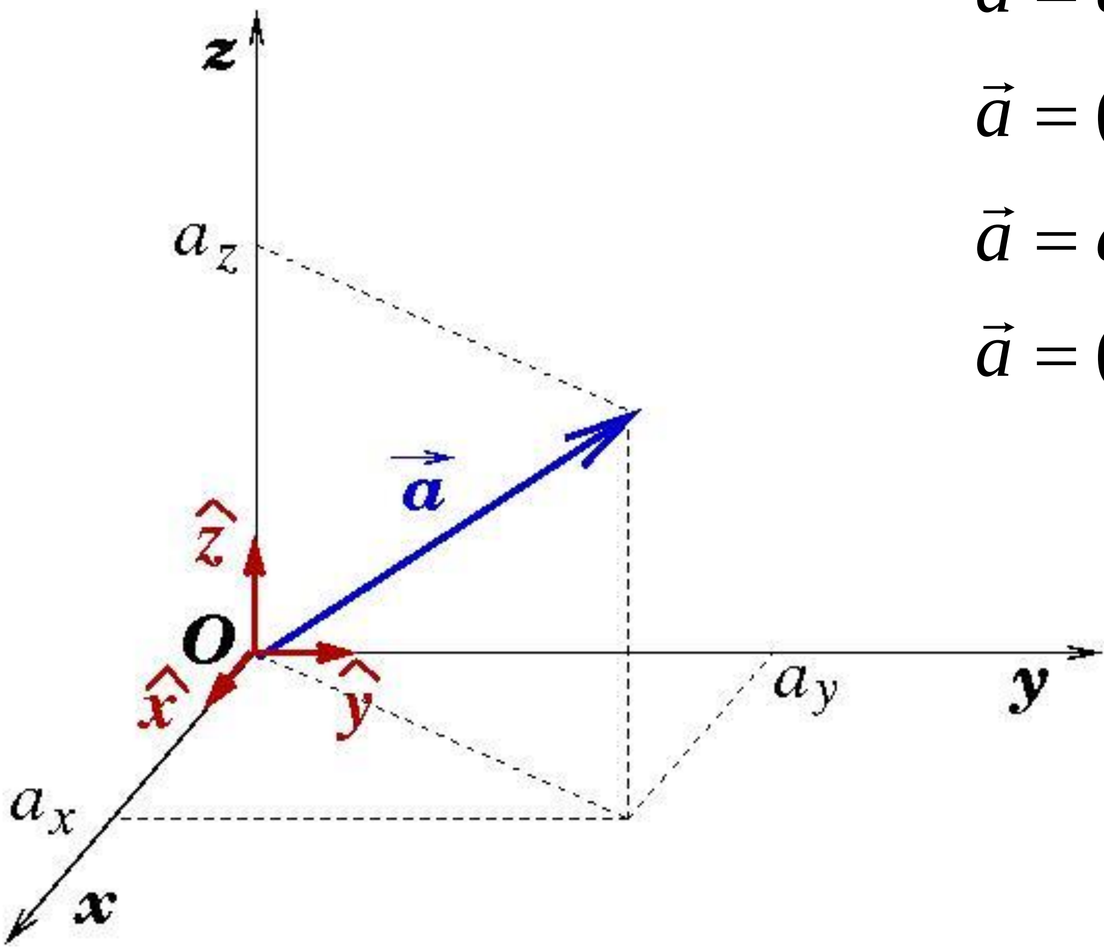
$$\vec{a} = a_x\,\hat{i}_x + a_y\,\hat{i}_y + a_z\,\hat{i}_z\,,$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}\,,$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$\vec{a} = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3\,,$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$



$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{x},$$

$$a_y = \vec{a}\cdot\hat{y},$$

$$a_z = \vec{a}\cdot\hat{z}\,.$$

Suma wektorów ***a*** i ***b***

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Wektor zerowy, ***0***

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

Wektor przeciwny do wektora ***a***

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \rightarrow -\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

Wynik mnożenia wektora ***a*** przez liczbę *k*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \rightarrow k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Iloczyn skalarny wektorów ***a*** i ***b***

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_1\,\hat{x} + a_2\,\hat{y} + a_3\,\hat{z}\right) \cdot \left(b_1\,\hat{x} + b_2\,\hat{y} + b_3\,\hat{z}\right) =$$

$$a_1 b_1\,\hat{x} \cdot \hat{x} + \cancel{a_1 b_2\,\hat{x} \cdot \hat{y}} + \cancel{a_1 b_3\,\hat{x} \cdot \hat{z}} +$$

$$\cancel{a_2 b_1\,\hat{y} \cdot \hat{x}} + a_2 b_2\,\hat{y} \cdot \hat{y} + \cancel{a_2 b_3\,\hat{y} \cdot \hat{z}} +$$

$$\cancel{a_3 b_1\,\hat{z} \cdot \hat{x}} + \cancel{a_3 b_2\,\hat{z} \cdot \hat{y}} + a_3 b_3\,\hat{z} \cdot \hat{z} =$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1,$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0.$$

Iloczyn wektorowy wektorów ***a*** i ***b***

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1 \hat{x} + a_2 \hat{y} + a_3 \hat{z}\right) \times \left(b_1 \hat{x} + b_2 \hat{y} + b_3 \hat{z}\right) = \\
&\cancel{a_1 b_1 \hat{x} \times \hat{x}} + a_1 b_2 \hat{x} \times \hat{y} + a_1 b_3 \hat{x} \times \hat{z} + \\
&a_2 b_1 \hat{y} \times \hat{x} + \cancel{a_2 b_2 \hat{y} \times \hat{y}} + a_2 b_3 \hat{y} \times \hat{z} + \\
&a_3 b_1 \hat{z} \times \hat{x} + a_3 b_2 \hat{z} \times \hat{y} + \cancel{a_3 b_3 \hat{z} \times \hat{z}} = \\
&\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) \hat{x} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) \hat{y} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \hat{z}
\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy następujące wyniki

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0,$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}\,,\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x},\ \ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}.$$

Popularny sposób zapisu iloczynu wektorowego przy pomocy wyznacznika

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Jeszcze inny sposób wykorzystuje symbol Leviego-Civity oraz konwencję sumacyjną.

Symbol Leviego-Civity, ε_{ijk} jest symbolem całkowicie antysymetrycznym, w szczególności wynosi zero, gdy dowolne indeksy się powtarzają. Zachodzi na przykład: $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{213} = -1$, $\varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{132} = -1$, …, $\varepsilon_{113} = 0$, $\varepsilon_{122} = 0$, …

Konwencja sumacyjna polega na sumowaniu w ustalonym zakresie po tych indeksach, które się powtarzają w danym wyrażeniu.

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \equiv \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

i-ta składowa iloczynu wektorowego

konwencja sumacyjna

$$\epsilon_{pil}\epsilon_{ljk} = \delta_{pj}\delta_{ik} - \delta_{pk}\delta_{ij}$$

ważny związek symbolu L-C z deltą Kroneckera

W zapisie sumacyjnym zachodzi w szczególności

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i\, b_i = a_j\, b_j = a_k\, b_k = \ldots\,,$$

$$\delta_{ik}\, a_i = a_k$$

Mamy swobodę w wyborze wskaźnika, po którym sumujemy, jeśli nie prowadzi to do kolizji oznaczeń !

Symbol Leviego-Civity i konwencja sumacyjna są bardzo pomocne w obliczeniach bardziej skomplikowanych iloczynów oraz w dowodzeniu tożsamości wektorowych. Na przykład:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,(\vec{B} \cdot D) - (\vec{A} \cdot \vec{D})\,(\vec{B} \cdot C)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})]\,\vec{C} - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]\,\vec{D}$$

Udowodnić tożsamość

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Dowód:

$$L_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b}\times\vec{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} a_j b_l c_m =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m =$$

$$= \delta_{il}\delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_j b_l c_m =$$

$$= \delta_{il} b_l \delta_{jm} c_m a_j - \delta_{im} c_m \delta_{jl} a_j b_l =$$

$$= b_i c_j a_j - c_i a_l b_l =$$

$$= a_j c_j b_i - a_l b_l c_i =$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c}) b_i - (\vec{a}\cdot\vec{b}) c_i = P_i$$

Obie strony są wektorami. Mogę pokazać, że i-ta składowa obu stron jest taka sama

Wreszcie możemy zająć się opisem ruchu !

Zaczynamy od opisu ruchu punktu materialnego

Punkt materialny to obiekt, który ma masę *m,* ale zaniedbywalne rozmiary (jedna z wielu idealizacji)

Podstawowe pojęcia

Uwaga: trzeba dokładnie zrozumieć definicje, bo ***znaczenia*** pewnych słów używanych w mechanice i w języku codziennym są ***inne***.

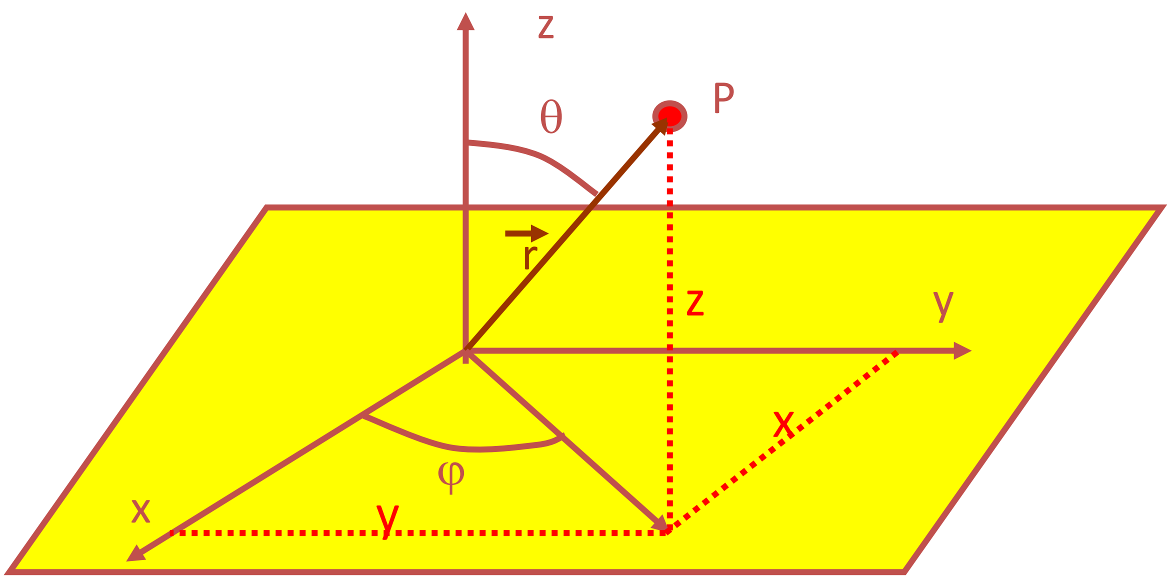
Ruch ciała:

Położenie danego ciała względem innego ciała lub układu ciał
(tzw. ***układu odniesienia***) zmienia się w czasie.
Z oczywistych względów jest to pojęcie ***względne*** !

Z układem odniesienia wiążemy ***układ współrzędnych***
(np. kartezjański układ współrzędnych x, y, z o początku w punkcie O.

Położenie i tor

W układzie współrzędnych położenie punktu jest określone przez tzw. wektor położenia (inaczej promień wodzący), ***r***.



W układzie kartezjańskim zapisujemy wektor położenia, używając ***stałych*** wektorów jednostkowych poszczególnych osi oraz współrzędnych *x,y i z*:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

lub

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

lub

$$\vec{r} = (x\,, y\,, z\,)$$

Jeśli punkt się porusza, to wektor położenia ***r*** staje się funkcją czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z} \equiv \left(x(t),\; y(t), z(t) \right)$$

Powyższe równanie wektorowe jest równoważne w układzie kartezjańskim trzem równaniom skalarnym:

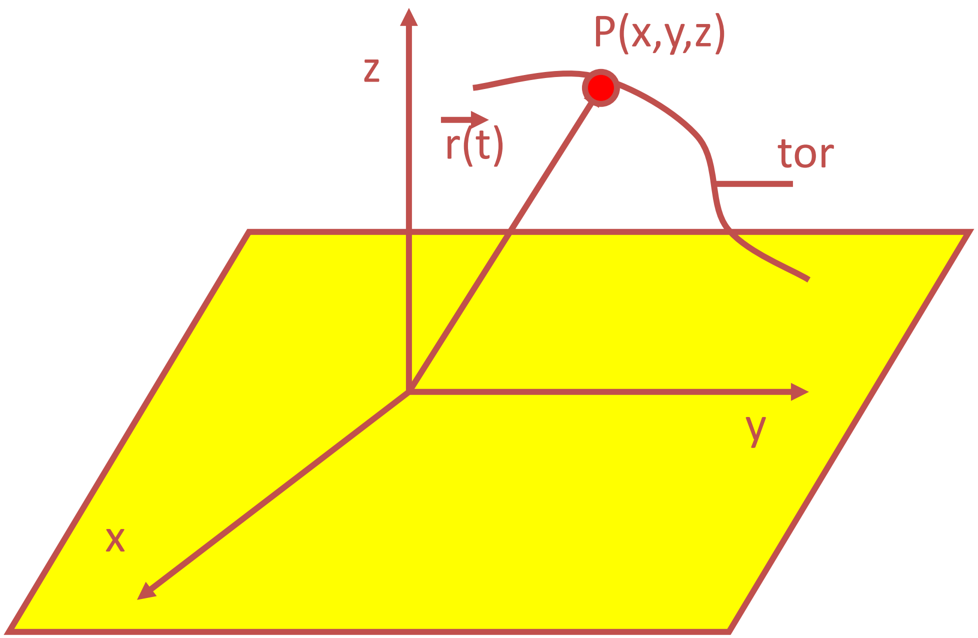
$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Równania te są równocześnie równaniami parametrycznymi toru, czyli krzywej geometrycznej, którą zakreśla punkt materialny podczas swego ruchu.

W zależności od tego, czy tor jest linią krzywą czy prostą, mówimy o ruchu krzywoliniowym lub prostoliniowym.



Eliminując czas z równań toru, znajdujemy kształt toru zakreślanego przez poruszający się punkt P

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

$$\downarrow$$

$$y = F_1(x)$$
$$z = F_2(x)$$

Uwaga:
Niekiedy potrzeba więcej równań tego typu !

Jeśli ruch odbywa się w ustalonej płaszczyźnie (przyjmijmy, że jest to płaszczyzna xy), wtedy wystarczą dwa równania

$$x = x(t) \qquad \longrightarrow \qquad y = F(x)$$

$$y = y(t)$$

Niekiedy można wyeliminować czas i uzyskać zależność y od x

Przykład 1 (rzut poziomy)

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \longrightarrow \qquad y = h - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$$

Jest to równanie paraboli z ramionami skierowanymi przeciwnie do zwrotu osi y i wierzchołku w punkcie (0,h)

Przykład 2 (dowolny ruch po okręgu o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych)

$$x = R\cos(\varphi(t))$$
$$y = R\sin(\varphi(t))$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + y^2 = R^2$$

Niekiedy potrzeba więcej równań typu

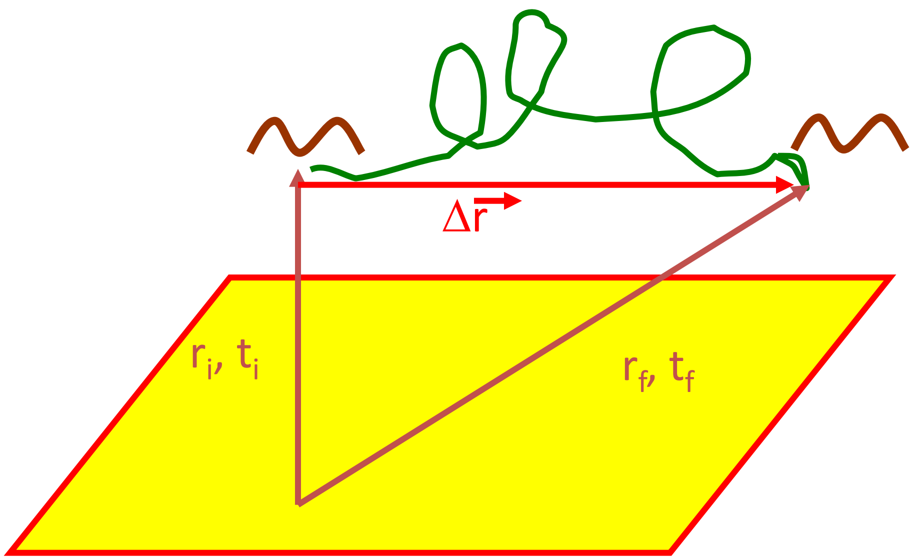
$$y = F(x)$$

$$y_1 = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

Przemieszczenie i prędkość średnia

Rozważmy osobę, która znajduje się w początku układu współrzędnych i obserwuje lot ptaka



W czasie $\Delta t = t_f - t_i$ zmienił się wektor położenia ptaka. Różnica

$\boldsymbol{\Delta r = r_f - r_i}$

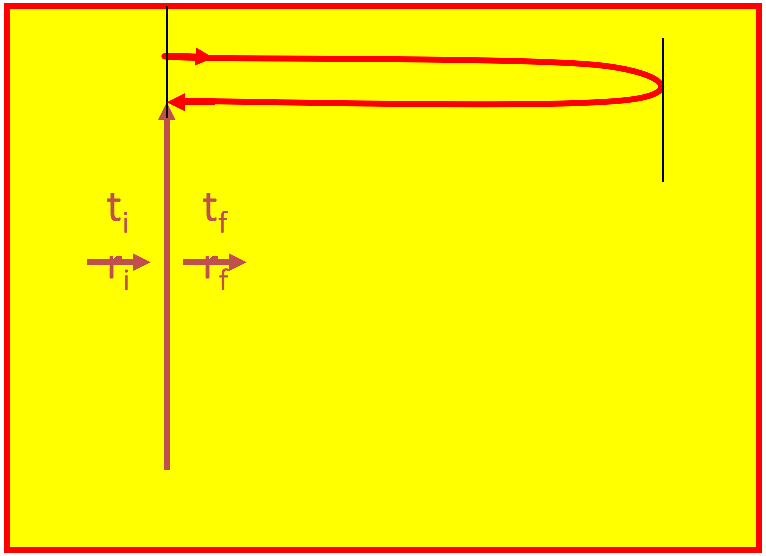
jest przemieszczeniem (wektor!)

Średnią prędkością nazywamy wektor zdefiniowany następująco:

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Kierunek tej prędkości jest zgodny z kierunkiem wektora $\boldsymbol{\Delta r}$ **.**

Jaka będzie prędkość pływaka w basenie, który płynie tam i z powrotem ?



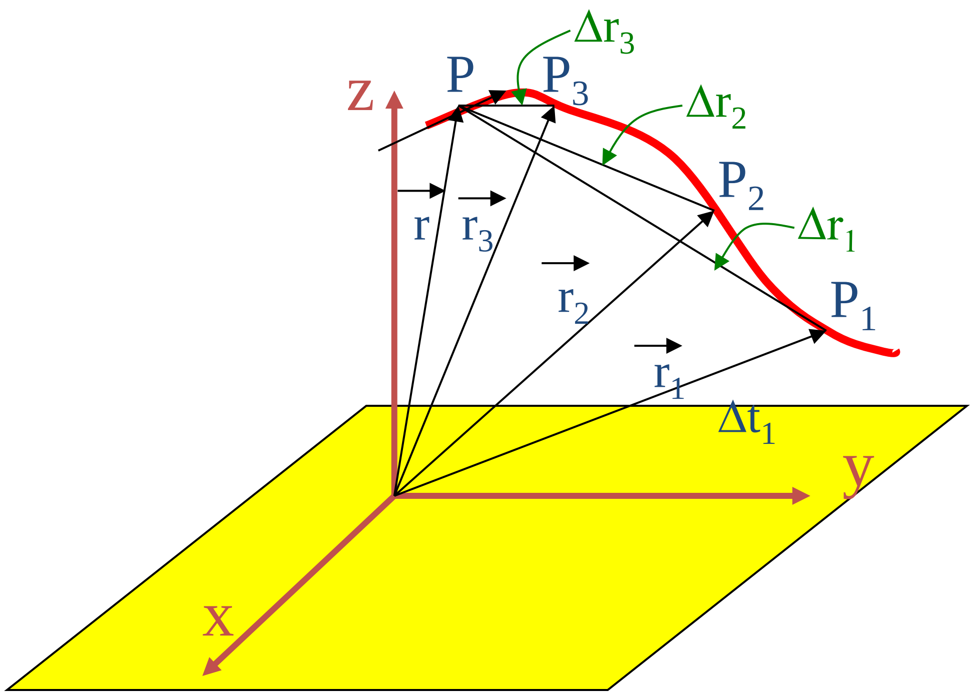
Średnia prędkość pływaka jest równa zero, chociaż pokonał on dystans dwóch długości basenu i płynął z niezerową prędkością !

Potrzebna jest bardziej precyzyjna informacja o ruchu pływaka

prędkość chwilowa

Prędkość chwilowa

Bardzo często interesuje nas prędkość jakiegoś ciała w konkretnym punkcie P.



Zacznijmy skracać przedziały czasu, w których określamy położenie ciała. Każdorazowo konstruujemy wektor prędkości średniej

$$\vec{v}_n = \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{t - t_n} \equiv \frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t_n}$$

Jeśli ten iloraz różnicowy ma granicę dla $\Delta t_n \to 0$, to nazywamy ją ***prędkością chwilową***.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Prędkość chwilowa jest więc pochodną wektora położenia po czasie. Z własności krzywych różniczkowalnych wynika, że wektor prędkości chwilowej jest styczny do toru w punkcie P.

Ponieważ wektory jednostkowe układu kartezjańskiego są stałe w czasie, możemy napisać:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}\right) =$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{z}$$

$$\equiv \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

$$\equiv \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right)$$

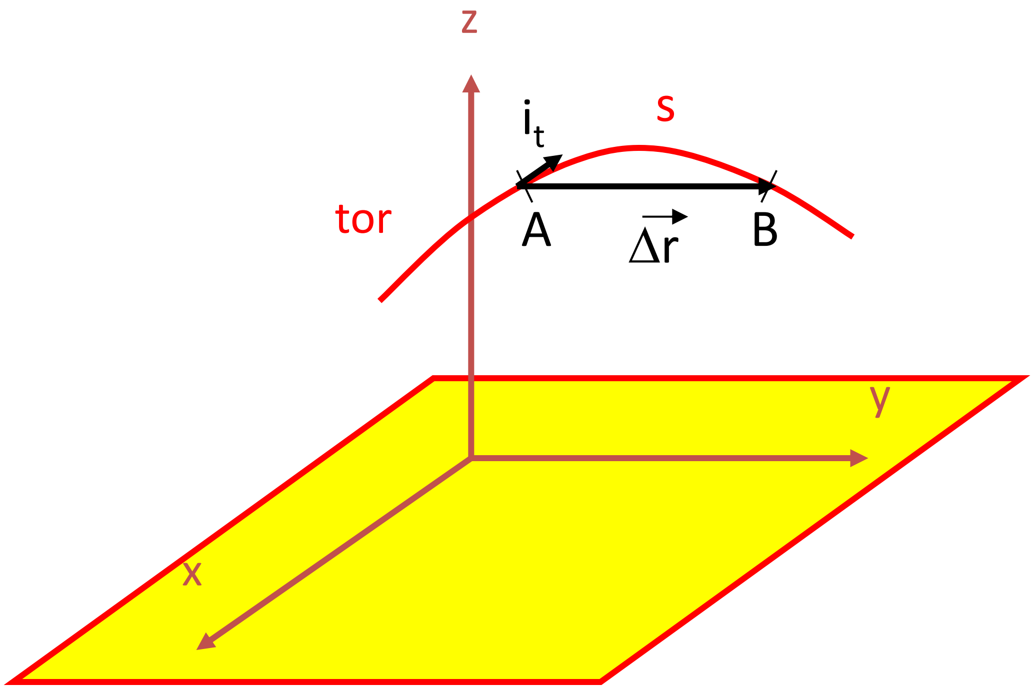
Składowe kartezjańskie wektora prędkości chwilowej są pochodnymi po czasie składowych kartezjańskich wektora położenia.

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

Bezwzględną wartość prędkości określamy w oparciu o definicję długości wektora. Nazywamy ją często **szybkością**. Jest to wielkość skalarna większa od zera lub równa zero.

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

Teraz możemy łatwo zapisać wzór na drogę przebytą prze punkt materialny w skończonym przedziale czasu.



Droga jest skalarem !

Droga s od punktu A do punktu B jest długością krzywej danej w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas t .

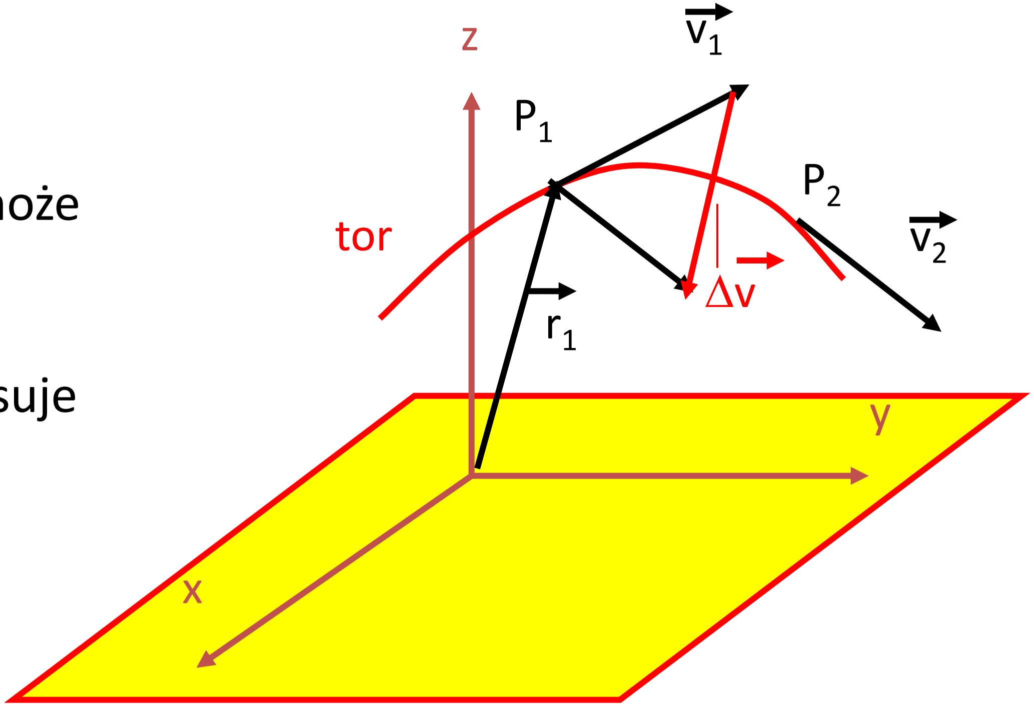
W układzie kartezjańskim:

$$s = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} |\vec{v}\,|\,dt = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}\,dt$$

.

Uwaga: zwykle $s > |\Delta \vec{r}\,|$

Prędkość punktu materialnego też może się zmieniać. Potrzebna jest wielkość, która opisuje te zmiany - przyśpieszenie.



Tak jak w przypadku prędkości, mówimy o przyśpieszeniu średnim …

$$\vec{a}_{śr} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

przyspieszenie średnie

… i przyspieszeniu chwilowym

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

W układzie kartezjańskim możemy napisać:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y} + v_z(t)\,\hat{z} \right) =$$

$$= \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{y} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{z}$$

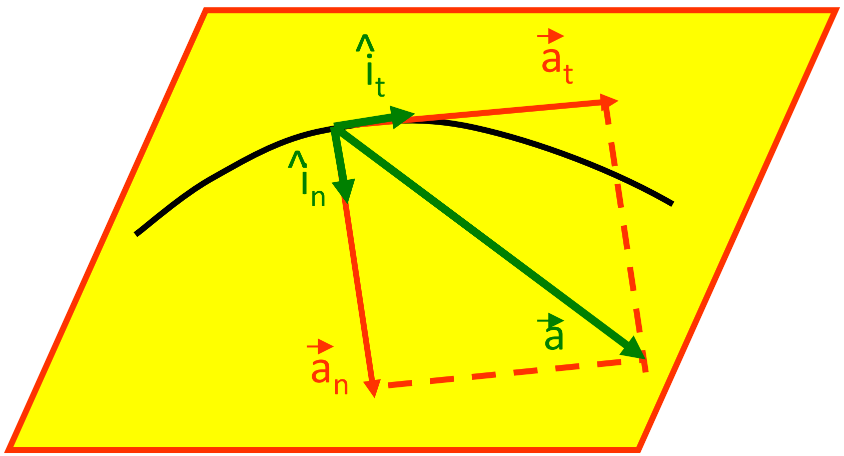
$$\equiv \left(x''(t), y''(t), z''(t) \right) = \left(a_x(t), a_y(t), a_z(t) \right)$$

Składowe kartezjańskie wektora przyspieszenia chwilowego są pochodnymi po czasie składowych kartezjańskich wektora prędkości i drugimi pochodnymi składowych wektora położenia.

Możliwe jest także inne podejście do przyspieszenia (z wyjątkiem ruchu prostoliniowego), w którym zapisujemy przyspieszenie jako sumę wektora stycznego do toru (przyspieszenie styczne) i prostopadłego do toru (przyspieszenie normalne)

Kompletne wyprowadzenie (dla bardziej zainteresowanych) znajduje się pod adresem
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/przyspnatur.pdf

Idea: fragment łuku jest bardzo zbliżony do kawałka okręgu



$$\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{i}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}\hat{i}_n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

normalne przyspieszenie

styczne (ang. tangential) przyspieszenie

promień krzywizny

Pierwszy typowy problem kinematyczny:

Mając daną postać ***r(t)***,

policzyć: $\vec{v}, |\vec{v}|, \vec{a}, |\vec{a}|, \vec{a}_t, \vec{a}_n, \rho$

Nie zawsze współrzędne kartezjańskie są najwygodniejsze.

Niekiedy wygodniej jest użyć współrzędnych walcowych lub sferycznych. Są to tzw. współrzędne krzywoliniowe. Wyprowadzenie wzorów na prędkość i przyspieszenie w tych współrzędnych jest przygotowane na stronie:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/przyspwalcsfer.pdf

Wzory dotyczące prędkości (z wyprowadzeniami) są obowiązujące !
Dla przyspieszenia wymagane będą jedynie końcowe wzory.

Podstawowe wzory w układzie kartezjańskim

(położenie, prędkość, droga)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z} \equiv \left(x(t),\ y(t), z(t)\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{z} \equiv \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

$$s = \int_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} |\,\vec{v}\,|\,dt$$

droga przebyta w przedziale czasu $[t_A, t_B]$

Podstawowe wzory w układzie kartezjańskim c.d.
(przyspieszenie, składowe styczna i normalna przyspieszenia, promień krzywizny)

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{z} =$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{z}$$

Składowa normalna i styczna przyspieszenia, promień krzywizny toru

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \;,\; |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\,|\,\vec{v}\,|}{dt}\hat{i}_t \;,\; \vec{a}_n = \frac{|\,\vec{v}\,|^2}{\rho}\hat{i}_n \;,\; \rho = \frac{|\,\vec{v}\,|^3}{|\,\vec{v}\times\vec{a}\,|}$$

Drugi typowy problem kinematyczny:

Mając daną postać przyspieszenia w funkcji czasu ***a(t)***,
policzyć ***v(t)*** oraz ***r(t)***,

Najpierw pierwsza całka po czasie

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt$$

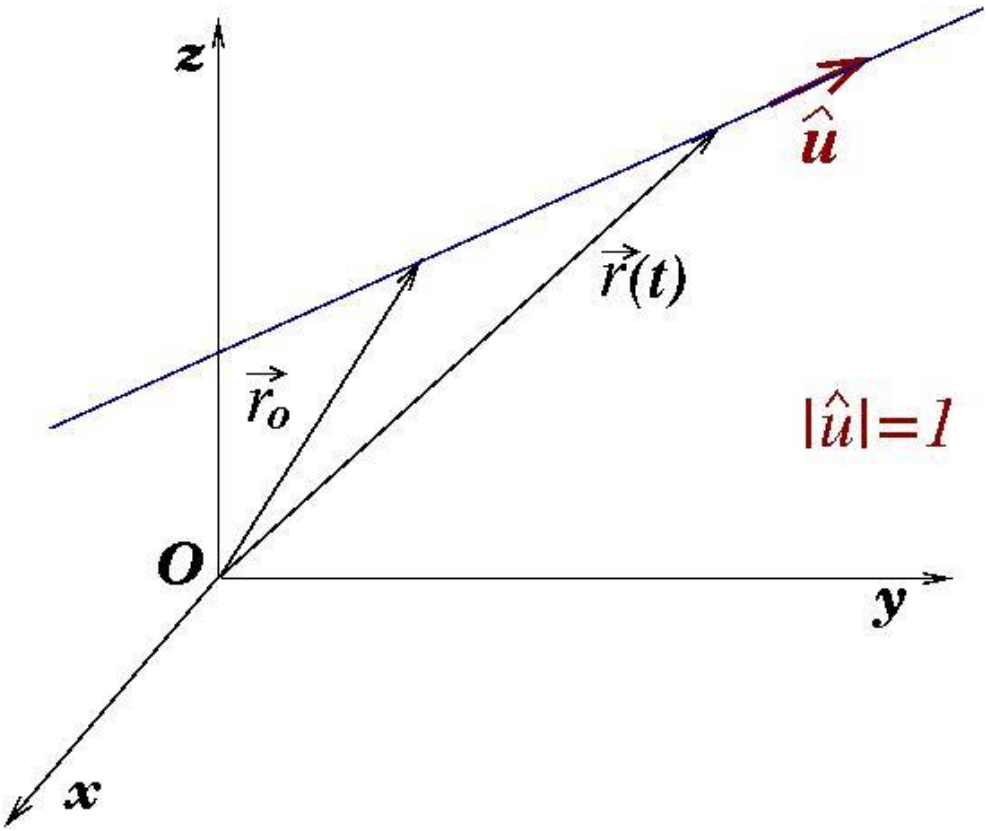
Potem druga całka po czasie

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt$$

Każdy z podanych wzorów wektorowych jest równoważny trzem wzorom skalarnym dla poszczególnych składowych wektorów prędkości, przyśpieszenia i położenia.
W kolejnych całkowaniach pojawiają się stałe całkowania !
Dają nam one swobodę wyboru $\boldsymbol{v(t=t_0)}$ oraz $\boldsymbol{r\,(t=t_0)}$, czyli warunków początkowych.

Przykłady ruchu

Ogólny ruch po linii prostej (prostoliniowy)

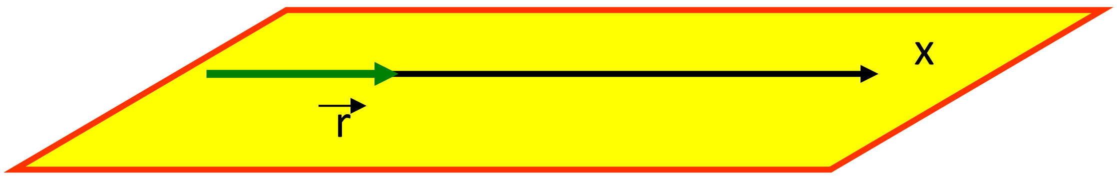


$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + f(t)\hat{u}$$

$$\vec{v}(t) = f'(t)\hat{u}$$

$$\vec{a}(t) = f''(t)\hat{u}$$

Jeżeli tor ruchu punktu materialnego jest linią prostą, to zawsze możemy tak dobrać układ współrzędnych, aby jedna z jego osi pokrywała się z torem. Zwykle wybiera się oś x.



Położenie, prędkość ciała i przyśpieszenie wynoszą odpowiednio:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{x}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\hat{x} = \frac{dv(t)}{dt}\,\hat{x}$$

Jeśli wektory przyśpieszenia i prędkości mają zwroty zgodne, mówimy o ruchu przyśpieszonym, a jeśli przeciwny mówimy o ruchu opóźnionym.

Ruch jednostajny po linii prostej

Ruch jednostajny to ruch, w którym prędkość jest stała, **v**=const.

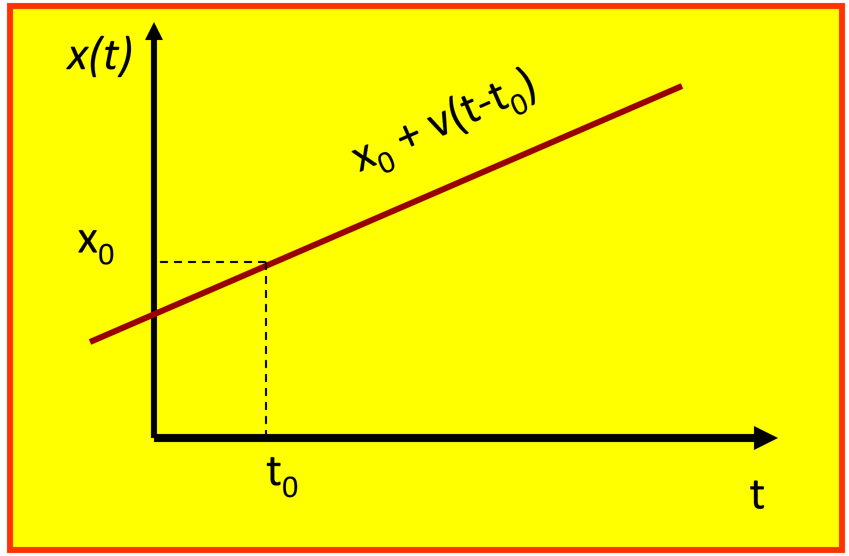
W takim ruch przyspieszenie jest równe zero !

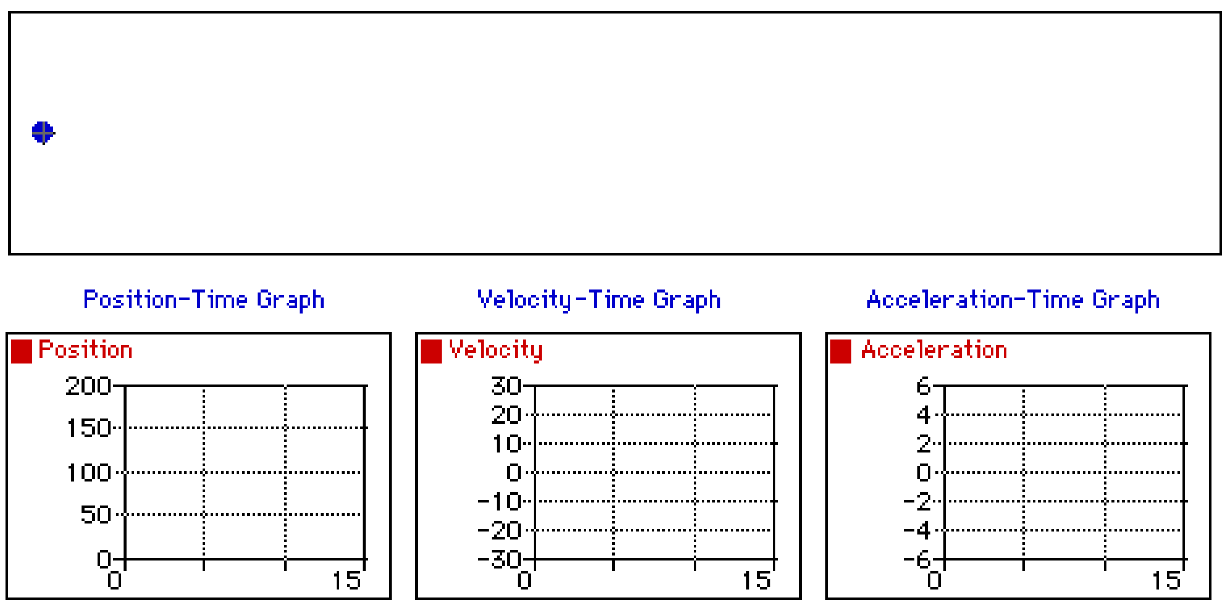
$$x = \int v\,dt = v\,t + C$$

Warunek początkowy $x(t = t_0) = x_0$

prowadzi do wzoru na *x(t)*

$$x = x_0 + v\,(t - t_0)$$


x(t)
x0 + v(t-t0)
x0
t0
t


Position-Time Graph
Velocity-Time Graph
Acceleration-Time Graph
Position
Velocity
Acceleration
200
150
100
50
0
0
15
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
15
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
15

Ruch jednostajnie zmienny po linii prostej

Ruch jednostajnie zmienny to ruch, w którym przyspieszenie jest stałe, *a*=const.
Jeśli *a* > 0, to ruch jest przyspieszony, jeśli *a* < 0, to ruch jest opóźniony

Najpierw znajdujemy prędkość $$v = \int a\, dt = a\, t + C_1$$

Warunek początkowy $$v(t = t_0) = v_0$$

prowadzi do wzoru na *x(t)* $$v = v_0 + a\,(t - t_0), \quad (C_1 = v_0 - a\, t_0)$$

Następnie znajdujemy położenie $$x = \int v\, dt = \int \left(v_0 + a\,(t - t_0)\right) dt = v_0\, t - a\, t_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 + C_2$$

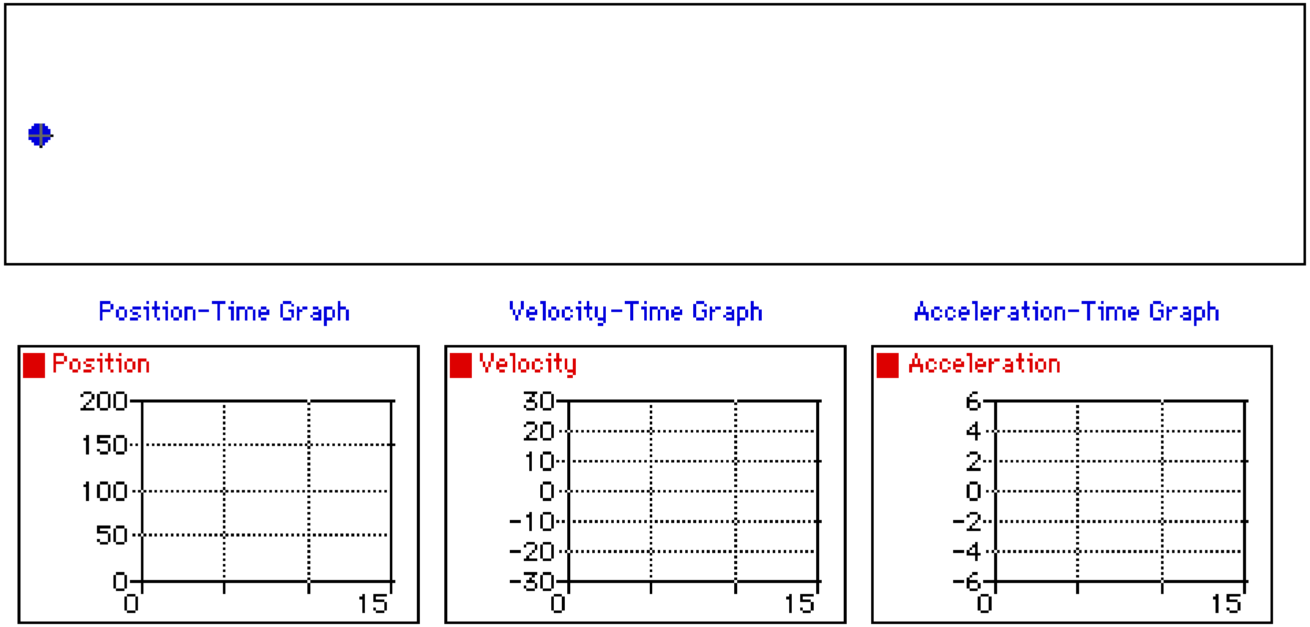
Warunek początkowy $$x(t = t_0) = x_0$$

pozwala znaleźć stałą C_2 , a następnie *x(t)* $$C_2 = \frac{1}{2} a\, t_0^2 - t_0\, v_0 + x_0$$

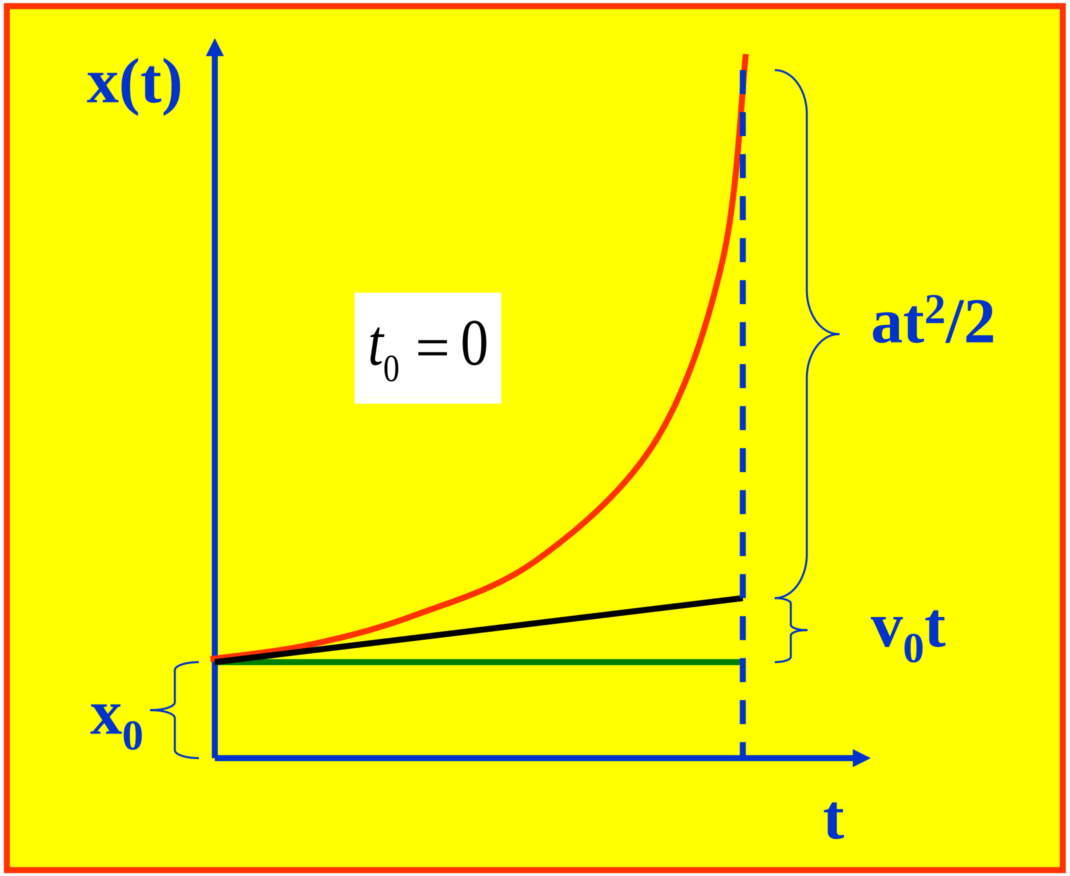
x(t) jest kwadratową funkcją czasu $$x = \frac{1}{2} a \left(t - t_0\right)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0$$

Ruch jednostajnie przyspieszony po linii prostej dla przypadku

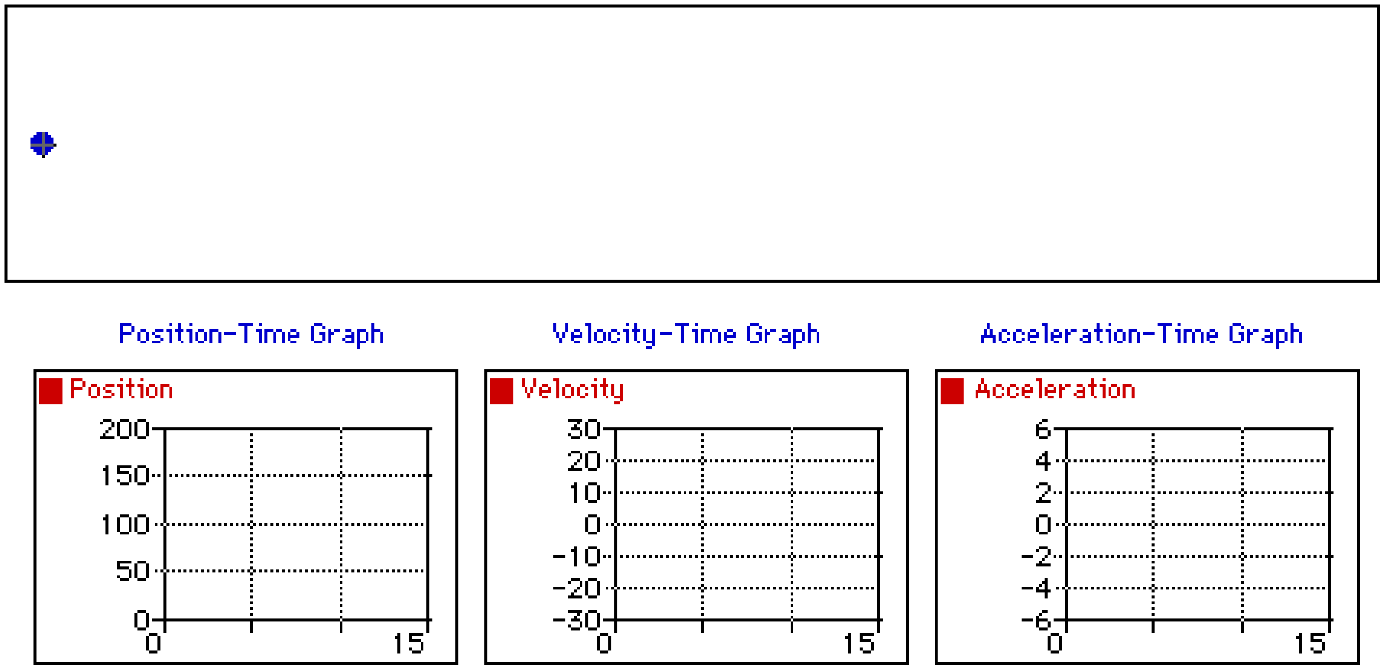
$$t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ v_0 = 0 \ \rightarrow\ x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$



$$t_0 = 0 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$



Ruch jednostajnie opóźniony po linii prostej



Ruch ze stałym przyśpieszeniem w przestrzeni

Przyspieszenie jest stałym wektorem, ale ruch nie jest już ograniczony do prostej. Można taki ruch zawrzeć w jednej płaszczyźnie, czyli jest to ruch płaski.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

Warunki początkowe:

$$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0\,,$$

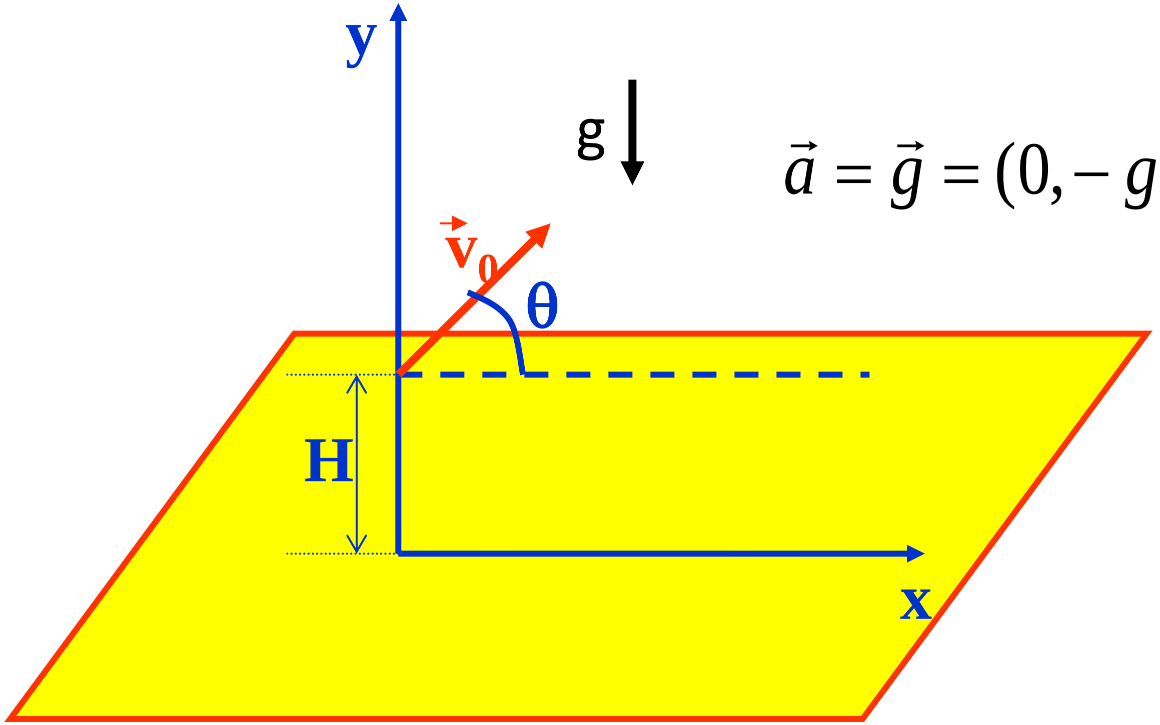
$$\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$$

Podstawowe zastosowanie: ruch w jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym z pominięciem oporu powietrza:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Przykład:
rzut ukośny

Ciało zostaje wyrzucone z wysokości H w jednorodnym polu ziemskim z prędkością początkową v_0, pod kątem θ do poziomu.



$$\vec{a} = \vec{g} = (0, -g, 0)\ ,\ g > 0$$

Wszystko, co musimy zrobić, by określić ruch ciała w dowolnej chwili, to podać warunki początkowe (ruch w płaszczyźnie xy):

$$t_0 = 0$$
$$\vec{r}_0 = (0, H, 0)$$
$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta, 0)$$

$$\longrightarrow$$

$$x(t) = v_0 (\cos\theta)\, t$$
$$y(t) = H + v_0 (\sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$z(t) = 0$$