

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 3

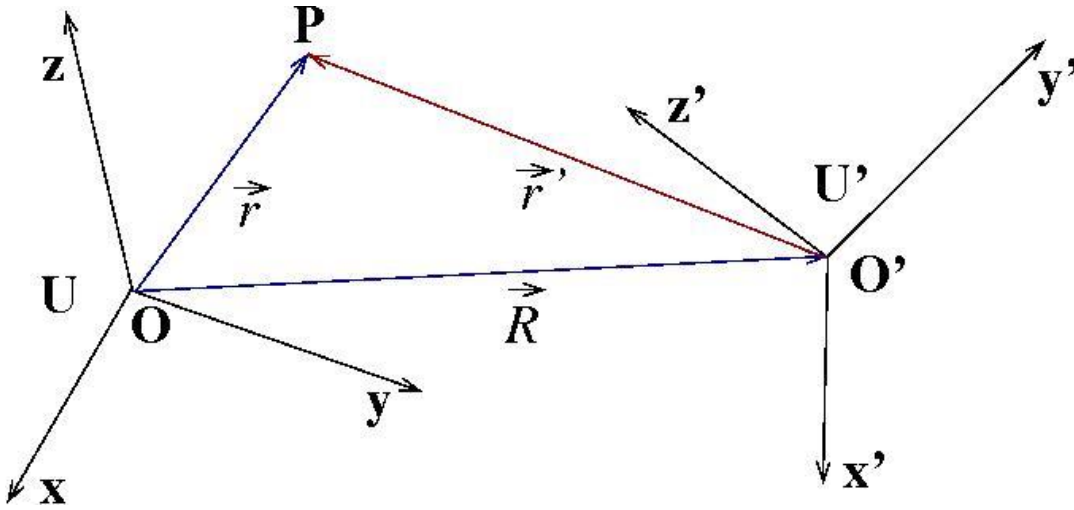
Na poprzednim wykładzie poznaliśmy prawa ruchu i wiemy, jak opisać ruch punktu materialnego w ***inercjalnym układzie odniesienia***.

Zasady dynamiki Newtona obowiązują w każdym inercjalnym układzie odniesienia – żaden taki układ nie jest wyróżniony. Wybór inercjalnego układu odniesienia jest zwykle kwestią wygody – chcemy, by rachunki były możliwie najprostsze.

Teraz zajmiemy się opisem ruchu w układzie nieinercjalnym. Układ nieinercjalny porusza się względem dowolnego układu inercjalnego z przyspieszeniem różnym od zera.

Problem ma duże znaczenie praktyczne. Wiemy bowiem, że Ziemia nie jest układem inercjalnym i dokładniejszy opis pewnych zjawisk wymaga uwzględnienia tego faktu.

Naszym głównym celem jest sformułowanie zasad dynamiki w dowolnym nieinercjalnym układzie odniesienia.



Rozważamy dwa układy odniesienia: inercjalny układ odniesienia U z układem współrzędnych kartezyjskich $x y z$ o początku w punkcie O oraz nieinercjalny układ odniesienia U' z układem współrzędnych $x' y' z'$ o początku w punkcie O'. Ruch punktu P chcemy opisać w tych dwóch układach.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v}' \equiv \frac{d'\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{a}' \equiv \frac{d'\vec{v}'}{dt}$$

Uwaga na „primy” !

Infinityzmalne (nieskończenie małe) przesunięcie punktu materialnego P względem układu U jest sumą dwóch przesunięć:

- (1) przesunięcia $d'\vec{r}'$ punktu materialnego P względem U' oraz
- (2) zmiany położenia P względem U na skutek ruchu układu U' względem układu U.

Każde przesunięcie U' względem U jest sumą
 (a) translacyjnego przesunięcia U' względem U
 (b) przesunięcia U' względem U na skutek
 obrotu U'

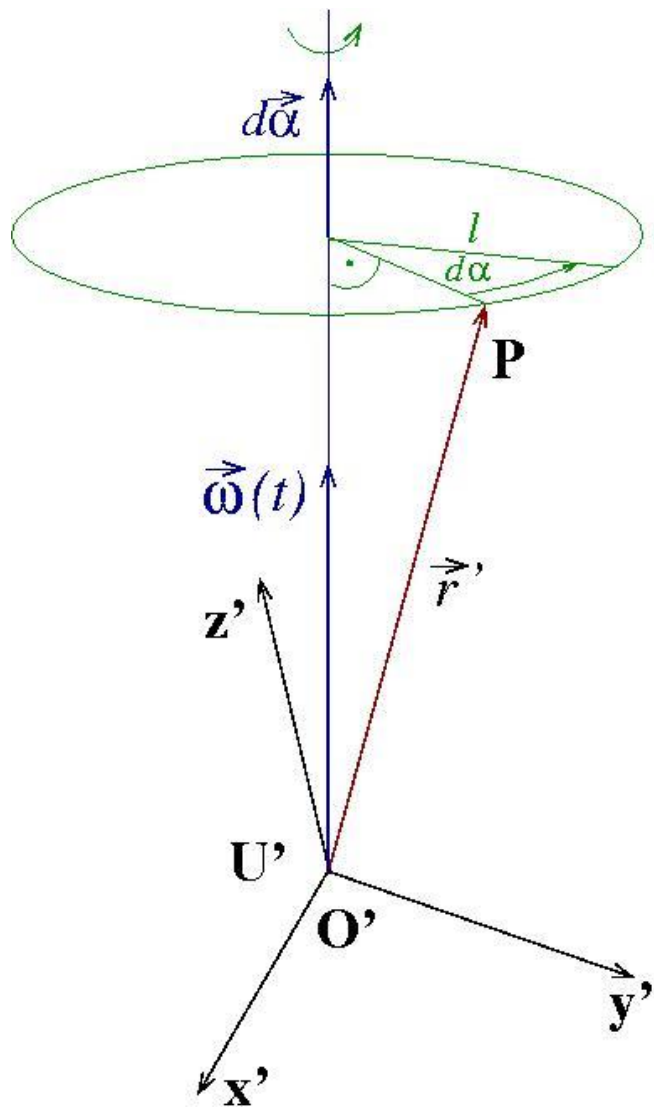
$$d\vec{r} = \overbrace{d'\vec{r}'}^{(1)} + \overbrace{\left(d\vec{r} \right)_{\text{translacja}} + \left(d\vec{r} \right)_{\text{obrót}}}_{(2)}$$

zmiana
położenia P
względem
układu U'

zmiana położenia P
względem U na skutek
ruchu translacyjnego
układu U' względem U ;
nie zależy od r'

zmiana położenia P
względem U na skutek
ruchu obrotowego
układu U' względem U ;
zależy od r'

Cechą charakterystyczną obrotu U' względem U jest istnienie prostej (osi obrotu) o tej własności, że początkowe i końcowe położenia każdego punktu r' układu U' leżą w płaszczyźnie prostopadłej do tej prostej i w jednakowej od niej odległości. Stąd wynika, że przez te dwa punkty można przeprowadzić okrąg o środku na osi obrotu, leżący w płaszczyźnie do niej prostopadłej.



$$(d\vec{r})_{\text{obrót}} = d\vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

$$|(d\vec{r})_{\text{obrót}}| = |d\vec{\alpha} \times \vec{r}'| =$$

$$|d\vec{\alpha}| |\vec{r}'| \sin(\angle d\vec{\alpha}, \vec{r}') =$$

$$|d\vec{\alpha}| l$$

$$d\vec{r} = d'\vec{r}' + (d\vec{r})_{\text{translacja}} + d\vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

Zastosujmy ten wzór do punktu O' ,
gdzie $\vec{r}' = \vec{0}$ oraz $\vec{r} = \vec{R}$.

Otrzymujemy:

$$d\vec{R} = \vec{0} + (d\vec{r})_{\text{translacja}} + \vec{0} \rightarrow$$

$$(d\vec{r})_{\text{translacja}} = d\vec{R}$$

$$d\vec{r} = d'\vec{r}' + d\vec{R} + d\vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

$$\vec{v}_{tr} \equiv \frac{d\vec{R}}{dt} \quad \longleftarrow \quad \text{prędkość translacyjna}$$

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \quad \longleftarrow \quad \text{prędkość kątowa}$$

Mamy już wzór na transformację prędkości !

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

prędkość w układzie inercyjnym U

prędkość w układzie nieinercyjnym U'

zmiana prędkości na skutek ruchu translacyjnego U' względem U

zmiana prędkości na skutek ruchu obrotowego U' względem U

Teraz chcemy znaleźć związek między pochodnymi w obu układach. W tym celu bierzemy *dowolny* wektor \vec{b}

$$\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d'\vec{r}_1'}{dt} + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1'$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d'\vec{r}_2'}{dt} + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}_2'$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

To jest bardzo ważny wzór, który mówi jak pochodna *dowolnego wektora* w układzie U wyraża się przez pochodną w układzie U' !

Mając do dyspozycji wzór

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b},$$

możemy wykonać dalsze różniczkowania i znaleźć związek między przyspieszeniami:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Uwaga: tu są jeszcze zwykłe pochodne (nieprimowane) i dlatego na przykład :

$$\vec{a}' \neq \frac{d\vec{v}'}{dt}!$$

$$\left(\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} \right)$$

Podstawiając, dostajemy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow

\vec{a} \vec{a}' \vec{a}_{tr} \vec{v}'

Ostatecznie

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

Wzór na transformację przyspieszenia i jego składniki !

przyspieszenie na skutek ruchu translacyjnego układu U' względem U

przyspieszenie Coriolisa

przyspieszenie na skutek zmiany prędkości kątowej ω

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

przyspieszenie w układzie inercyjnym U

przyspieszenie w układzie nieinercyjnym U'

przyspieszenie dośrodkowe

Znając wzór na transformację przyspieszenia, możemy podać prawo ruchu w układzie nieinercyjnym

$$m\vec{a} = m\vec{a}_{tr} + m\vec{a}' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

$$\rightarrow m\vec{a}' = m\vec{a} - \left(m\vec{a}_{tr} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right)$$

W układzie inercyjnym $m\vec{a} = \vec{F}$

Dlatego równanie ruchu otrzymuje postać:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - \left(m\vec{a}_{tr} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right)$$

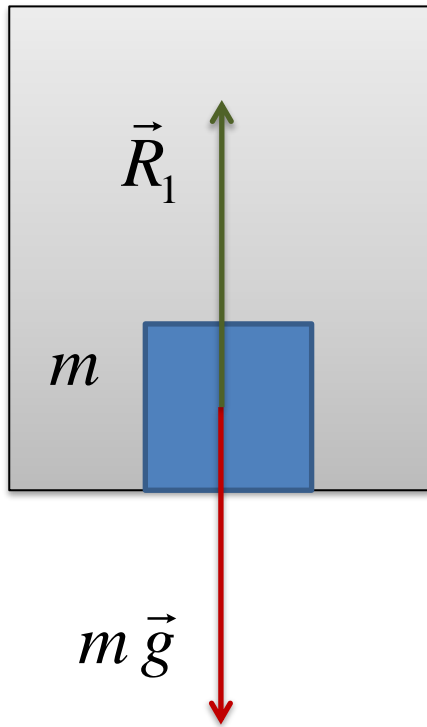
„realna”
siła

„pseudosiła”, siła pozorną, siła bezwładności

„Realna” siła ma źródło w oddziaływaniach fundamentalnych.
Siła bezwładności powstaje w układzie nieinercyjnym wyłącznie na skutek istnienia przyspieszenia tego układu względem układu inercyjnego. Jest zawsze proporcjonalna do masy ciała. Skutki siły bezwładności są jak najbardziej realne i musimy ją uwzględnić w opisie ruchu prowadzonym w układzie nieinercyjnym → równania ruchu w układzie nieinercyjnym uwzględniają siły bezwładności !

Przykład I: nieruchoma skrzynia w windzie

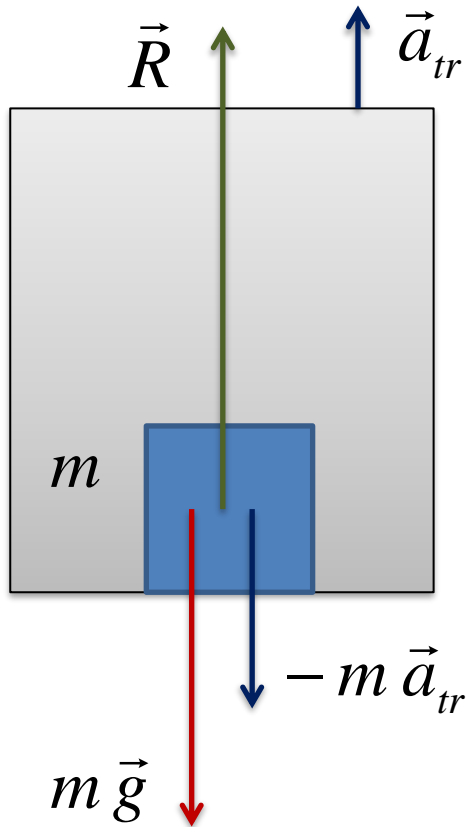
Dla ruchu jednostajnego windy $\vec{\omega} = 0$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$, $\vec{v}' = 0$, $\vec{a}_{tr} = 0$



Układ związany z windą jest układem inercyjnym; na skrzynię działają tylko realne siły: siła ciężkości i siła reakcji podłoża równoważą się.

Dla ruchu windy z przyspieszeniem skierowanym w górę

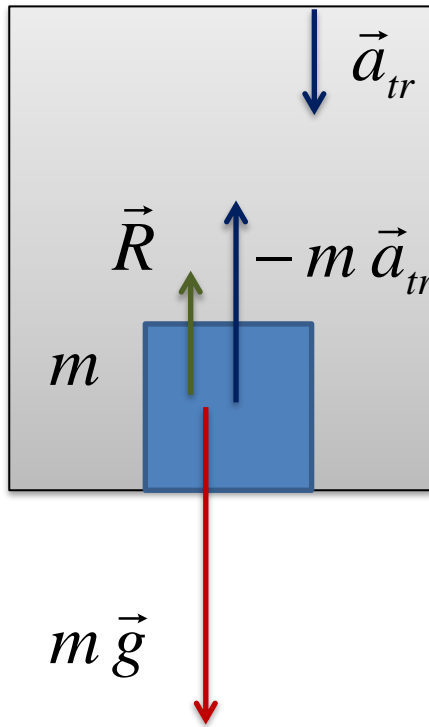
$$\vec{\omega} = 0, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0, \vec{v}' = 0, \vec{a}_{tr} \neq 0!$$



Przypadek, gdy winda przyspiesza jadąc w górę lub hamuje, jadąc w dół. W obu sytuacjach siła bezwładności $-m\vec{a}_{tr}$ powiększa nacisk na podłogę windy. Aby w układzie związanym z windą skrzynia była w spoczynku konieczna jest większa wartość reakcji podłoża.

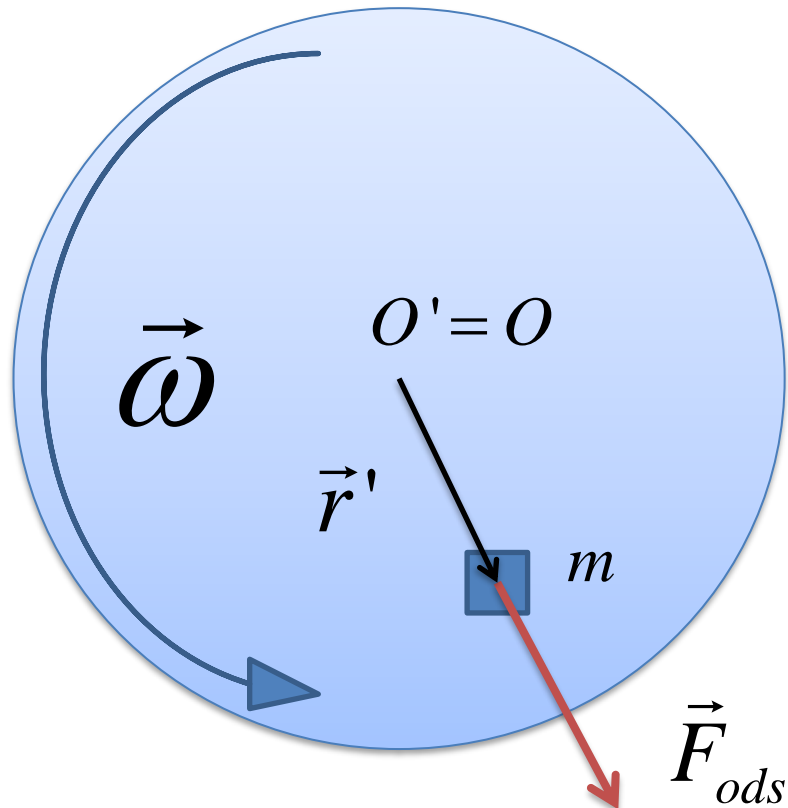
Dla ruchu windy z przyspieszeniem skierowanym w dół

$$\vec{\omega} = 0, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0, \vec{v}' = 0, \vec{a}_{tr} \neq 0!$$



Przypadek, gdy winda zwalnia jadąc w górę lub przyspiesza, jadąc w dół. W obu sytuacjach siła bezwładności $-m\vec{a}_{tr}$ zmniejsza nacisk na podłogę windy. Aby w układzie związanym z windą skrzynia była w spoczynku konieczna jest mniejsza wartość reakcji podłoża.

Przykład II, gdy ruch względny jest czystym ruchem obrotowym
 Klocek spoczywający na obracającej się w płaszczyźnie poziomej tarczy.
 Widok z góry: tarcza obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, czyli
 prędkość kątowa jest skierowana w naszą stronę !



$$\vec{a}_{tr} = 0, \vec{r}' \neq 0, \vec{v}' = 0, \vec{\omega} \neq 0, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

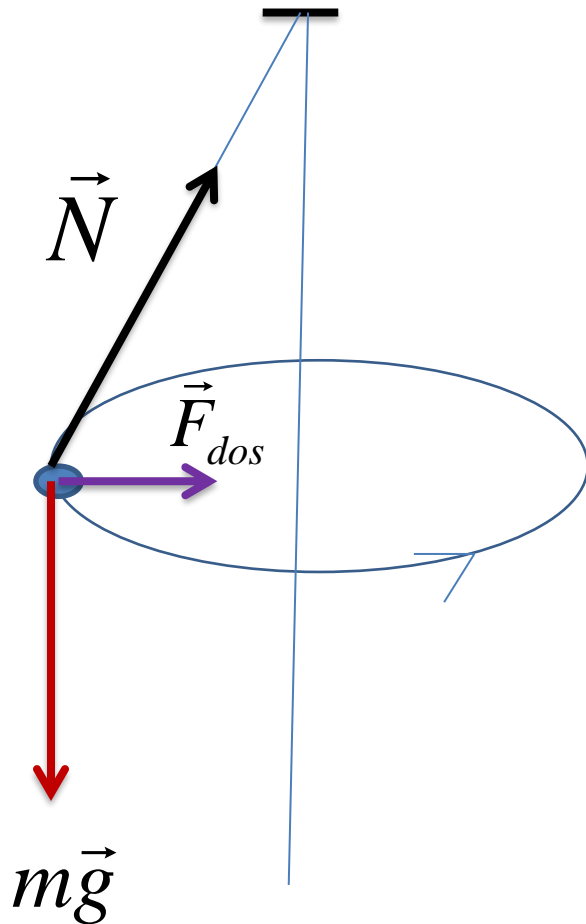
$$\vec{\omega} \perp \vec{r}' \rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{r}' = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ods} &= -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= -m \left((\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}' \right) = m \vec{\omega}^2 \vec{r}' \end{aligned}$$

Aby klocek pozostawał w spoczynku w układzie nieinercyjnym, potrzebna jest dodatkowa siła, na przykład tarcie.

Siła odśrodkowa czy może dośrodkowa ?

Pojęcia często mylone !

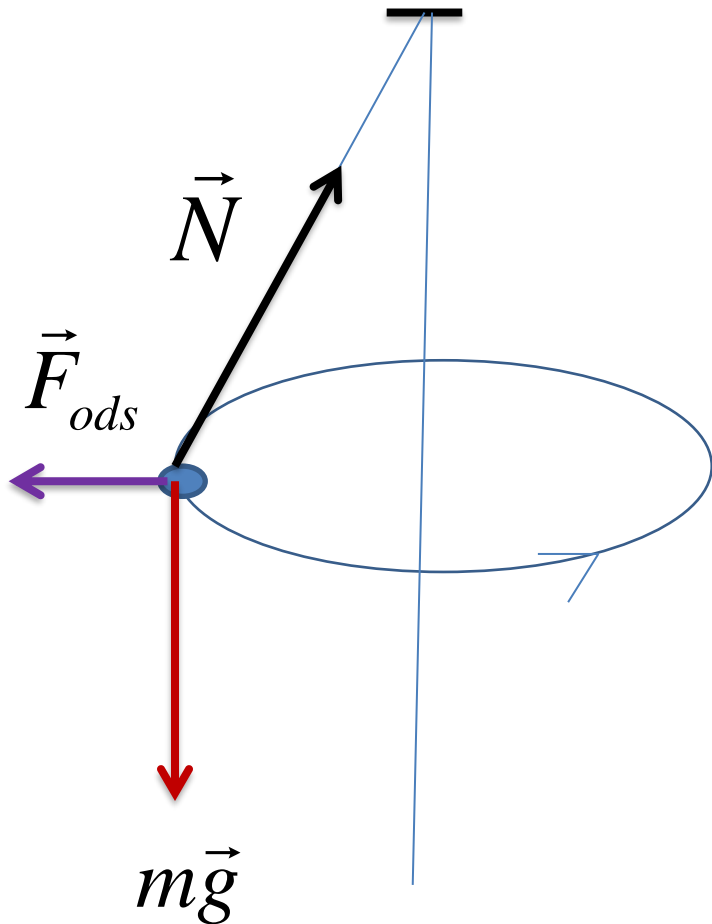


Kulka o masie m zawieszona na nici o długości l wykonuje jednostajny ruch obrotowy w płaszczyźnie poziomej.

Opiszmy tę sytuację najpierw **w układzie inercyjnym** związanym z Ziemią. W takim układzie na kulkę działają tylko dwie siły: siła naprężenia nici \mathbf{N} oraz siła ciężkości, $m\mathbf{g}$. Ich wypadkowa musi pełnić rolę **siły dośrodkowej**, bo kulka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu.

$$\vec{F}_{dos} = \vec{N} + m\vec{g}$$

Siła odśrodkowa czy może dośrodkowa c.d.



Teraz opiszmy tę samą sytuację **w układzie nieinercyjnym** związanym z kulką. W takim układzie kulka znajduje się w spoczynku, więc działające na nią siły muszą się równoważyć. Oprócz „realnych” sił (siły naprężenia nici, \mathbf{N} oraz siły ciężkości, $m\mathbf{g}$) działa siła bezwładności czyli **siła odśrodkowa**, przy czym zachodzi:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{ods} = 0$$

Wróćmy do klocka na obracającej się tarczy.

Klocek może teraz poruszać się względem tarczy.

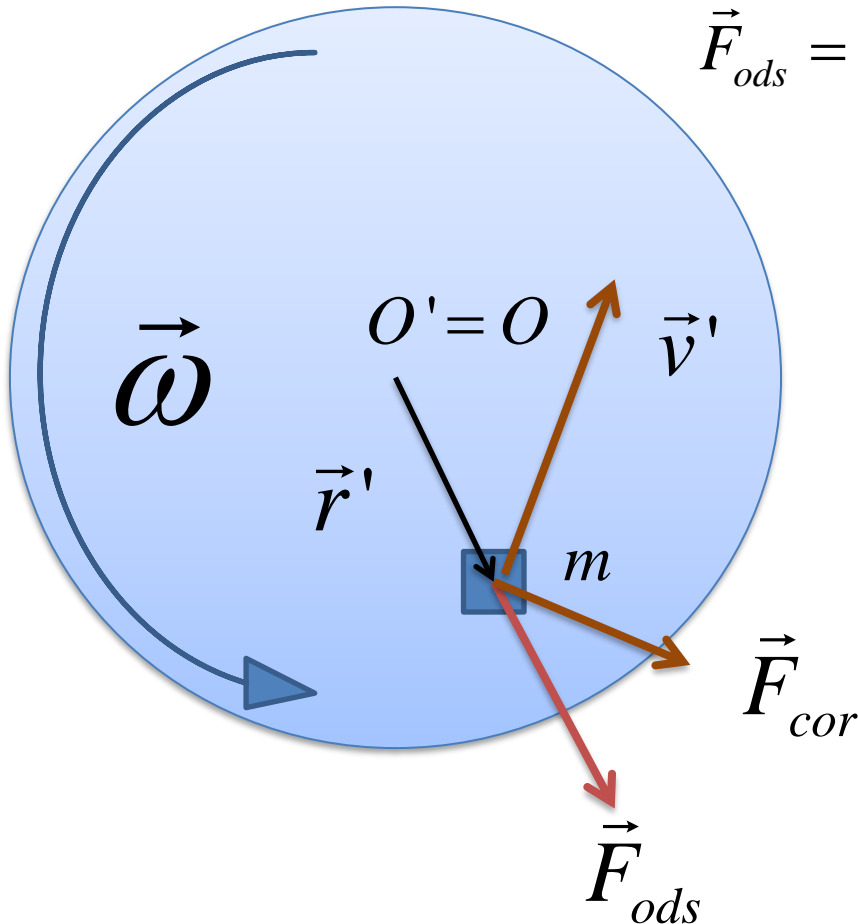
$$\vec{a}_{tr} = 0, \vec{r}' \neq 0, \vec{v}' \neq 0, \vec{\omega} \neq 0, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

$$\vec{F}_{ods} = m \vec{\omega}^2 \vec{r}'$$

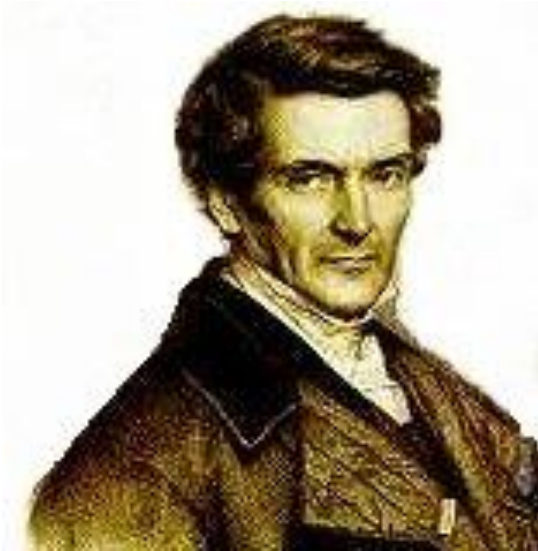
Siła odśrodkowa
jest taka sama jak
poprzednio.

Ze względu na to, że klocek
porusza się w obracającym się
układzie odniesienia, pojawia się
dodatkowa siła, tzw. **siła Coriolisa**:

$$\vec{F}_{cor} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$



Poświęćmy chwilę uwagi tej sile bezwładności, nazwanej od nazwiska francuskiego matematyka i inżyniera z początku XIX wieku.



Gaspard-Gustave de Coriolis
(1792-1843)

$$\vec{F}_{cor} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

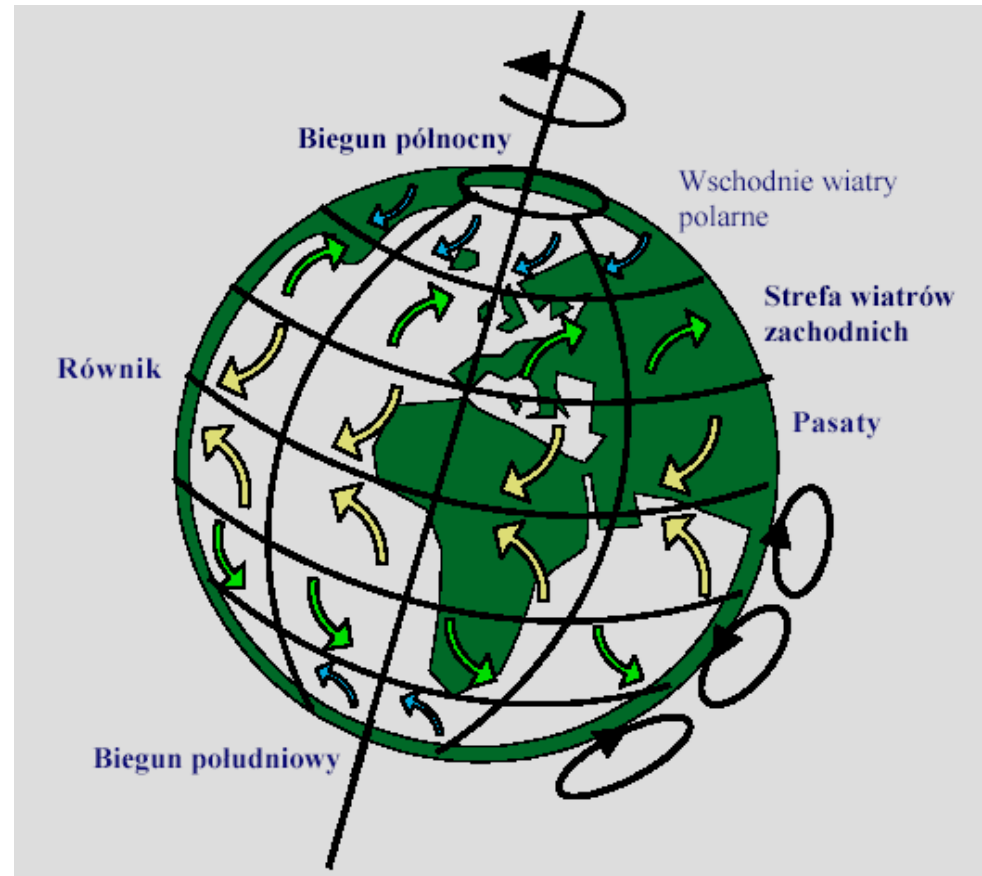
Siła Coriolisa działa wyłącznie na obiekty znajdujące w ruchu w układzie poruszającym się ruchem obrotowym.

Kierunek działania siły Coriolisa jest zawsze prostopadły do kierunku wektora prędkości poruszającego się ciała, tak więc siła ta powoduje odchylenie toru ruchu ciała od linii prostej.

Jakie efekty powoduje siła Coriolisa ?

Kierunki wiatrów stałych na obu półkulach

W szczególności masy powietrza znad równika po oddaniu wilgoci przemieszczają się w kierunku biegunów. Ulegając działaniu siły Coriolisa odchylają się na półkuli północnej na wschód, a na półkuli południowej na zachód.



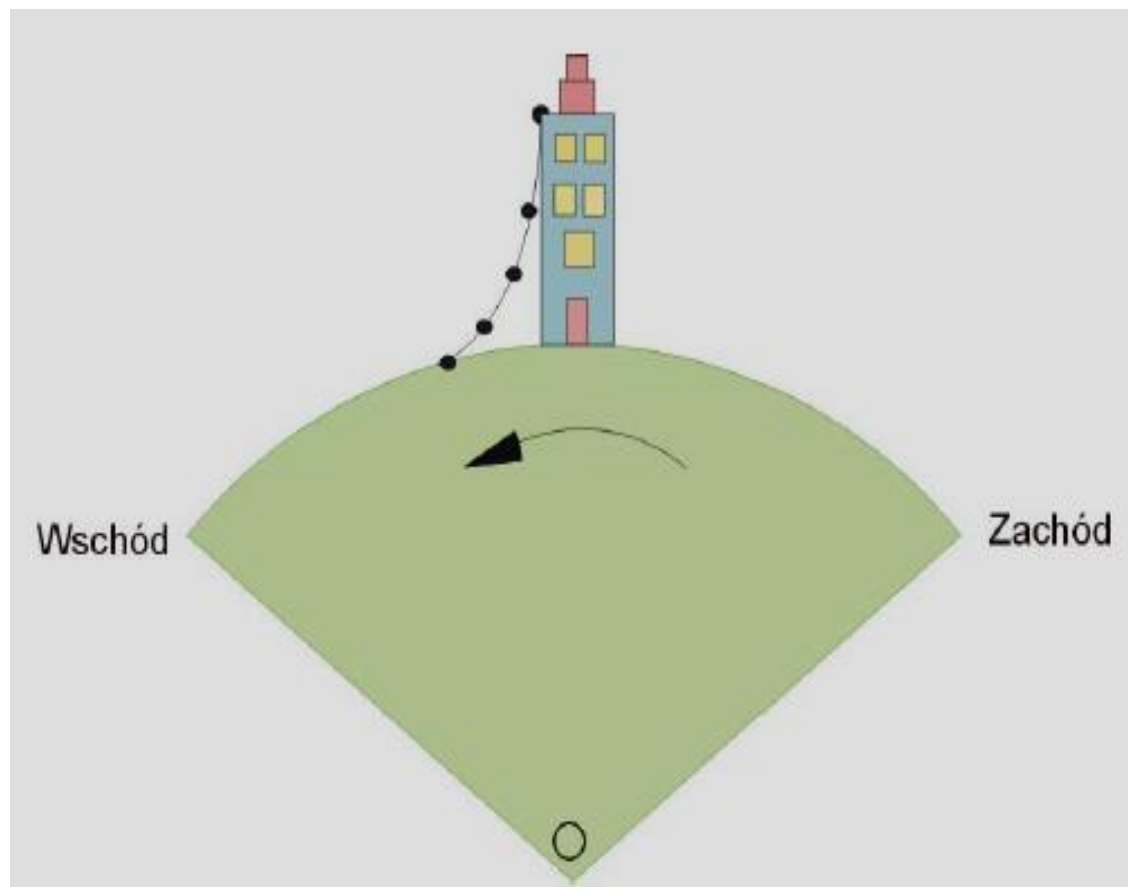
Wirowanie wiatrów w cyklonie

Siły Coriolisa decydują także o kierunku wirowania cyklonów.

Siły Coriolisa na półkuli północnej odchylają wiejące promieniście wiatry w prawo, co w rezultacie nadaje masom powietrza ruch wirowy o orientacji lewoskrętnej.



Ciało upuszczone z dużej wysokości nie spada pionowo na Ziemię !



Gdzie jeszcze można zaobserwować na Ziemi działanie siły Coriolisa ?

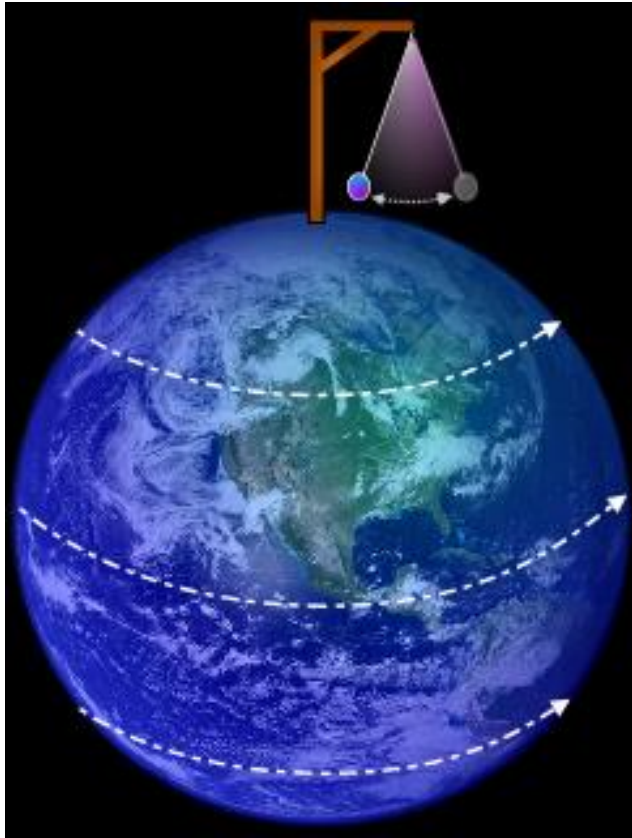
- Tory pocisków
- Podmywanie prawych brzegów rzek na półkuli północnej
- Szybsze ścieranie się prawych szyn kolejowych na półkuli północnej
- i inne, ale najbardziej znane jest

Wahadło Foucaulta

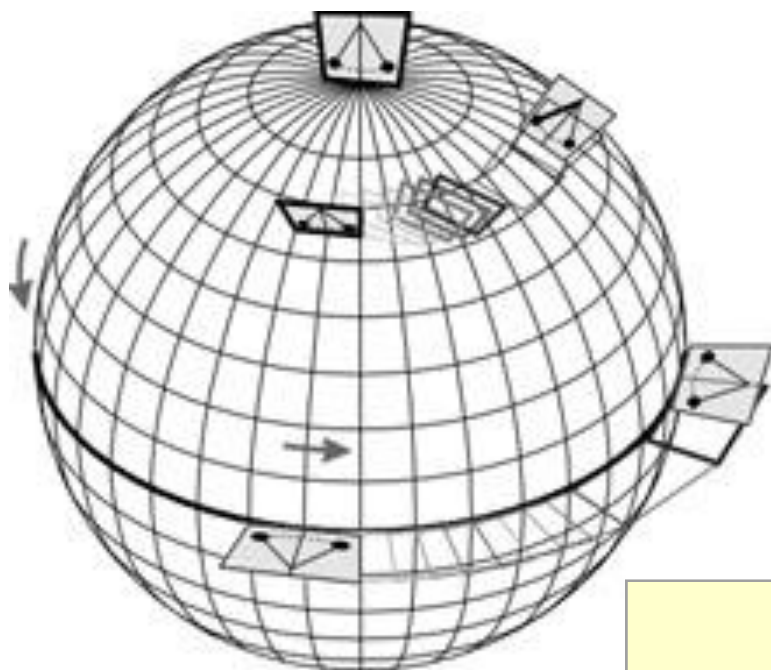
„wahadło posiadające możliwość wahań w dowolnej płaszczyźnie pionowej. Powolna zmiana płaszczyzny ruchu wahadła względem Ziemi dowodzi jej obrotu wokół własnej osi. Nazwa wahadła upamiętnia jego wynalazcę, Jeana Bernarda Léona Foucaulta, który zademonstrował je publicznie w 1851 roku w paryskim Obserwatorium Astronomicznym, a potem w Panteonie w Paryżu.”



Wahadło Foucaulta w Panteonie
(źródło: Wikipedia)



Dla obserwatora na biegunie związanego z wirującą Ziemią płaszczyzna drgań kręciłaby się, a okres jej obrotu byłby równy okresowi obrotu Ziemi.



Stwierdzono, że poza biegunem okres obrotu płaszczyzny wahań będzie zależał od szerokości geograficznej φ :

$$T(\varphi) = T_{\text{bieg}} / \sin(\varphi) \\ = (23\text{h } 56\text{m } 04.09\text{s}) / \sin(\varphi)$$

| Miejsce | L[m] | M[kg] |
|--|------|-------|
| Pantheon, Paryż | 67 | 28 |
| Oregon Convention Center in Portland | 27 | 408 |
| Museum of Science and Industry, Chicago | 20 | 300 |
| National Museum of American History, Washington, DC | 21 | 105 |
| Wieża Radziejowskiego, Frombork | 28 | 47 |
| ONZ, Nowy Jork | 23 | 91 |
| Instytut Fizyki, Toruń | 16 | 29 |
| Kościół św. Piotra i Pawła, Kraków | 46,5 | 25 |

W kościele
Św. Piotra i Pawła w
Krakowie odbywają się
pokazy wahadła Foucaulta.



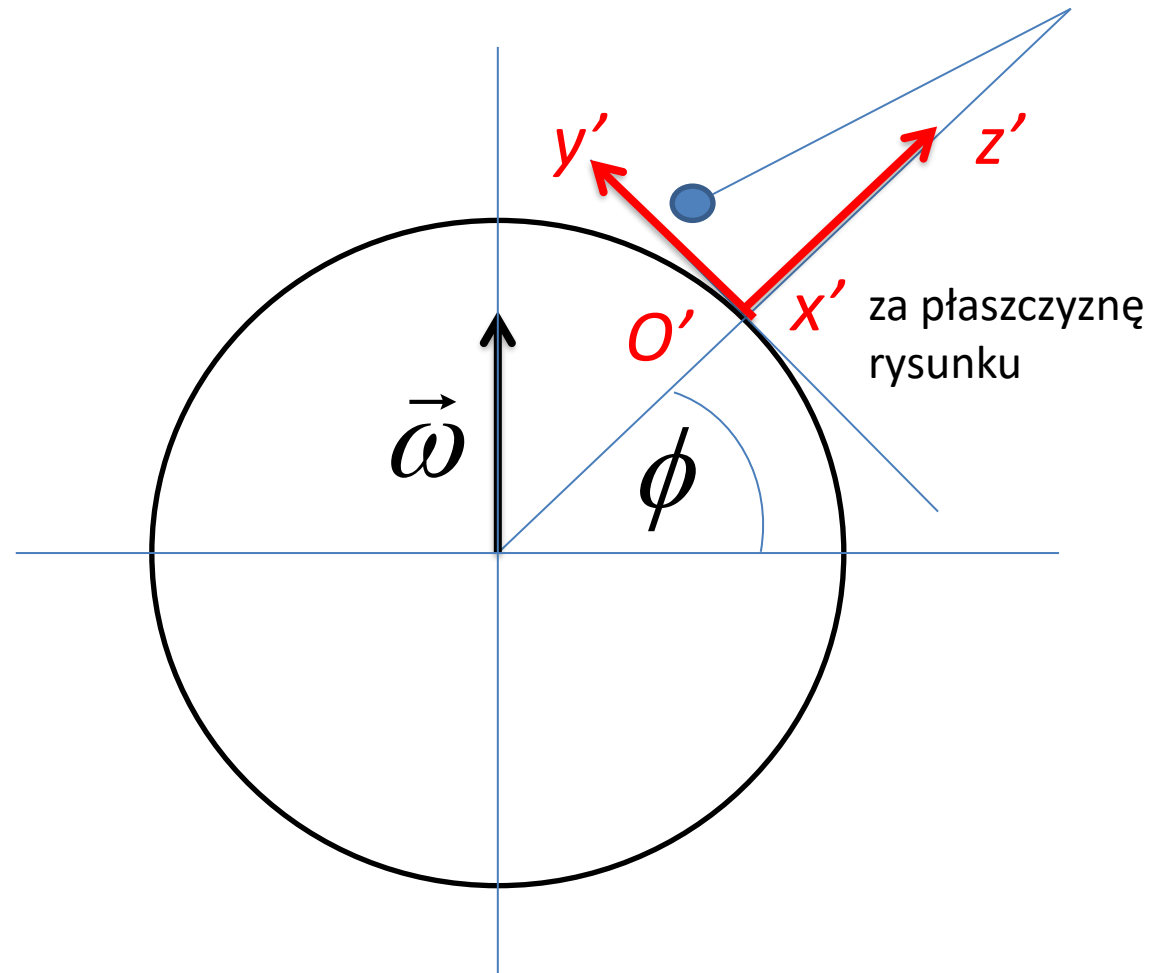
Korzystałem z rysunków ze strony
<http://ip.pwsz.glogow.pl/ryszard-matysiak/>

Krakowskie wahadło Foucaulta: próba modelowania

$\phi=50$ stopni (szerokość geograficzna północna)

$L=46.5$ m

$m=25$ kg



Jakie dodatkowe założenia warto wziąć pod uwagę

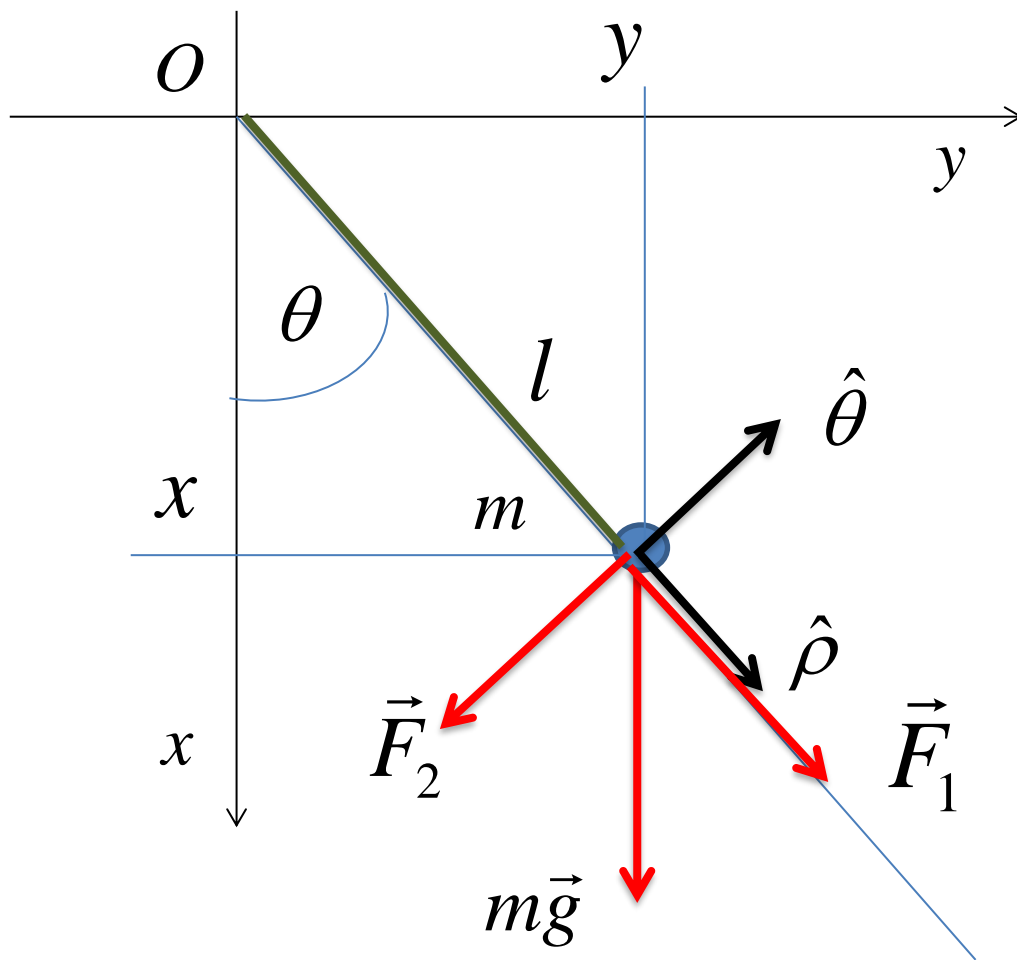
1. Ruch odbywa się w płaszczyźnie $x'y'$; ze względu na dużą długość linki wahadła w stosunku do jego wychylenia poprzecznego, można przyjąć $z'=\text{const}$
2. $a_{tr}=0$
3. $\omega=\text{const}$
4. Zmiany wektora \mathbf{r}' są bardzo małe w stosunku na przykład do promienia Ziemi; dlatego trzeci składnik w nawiasie można uznać za efektywną poprawkę do lokalnego przyspieszenia ziemskiego

$$m\vec{a}' = \vec{F} - \left(\cancel{m\vec{a}_{tr}} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + \cancel{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')} + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right)$$

Na placu boju zostają realne siły (siła grawitacji i naprężenie linki) oraz siła Coriolisa.

Wróćmy na chwilę do zwykłego wahadła matematycznego.

Wahadło matematyczne rozpatrywane w biegunowym układzie współrzędnych. Rozkładamy siłę ciężkości na składową radialną i transwersalną. Składowa radialna F_1 jest równoważona przez siłę naprężenia linki (więzy!), więc w kierunku radialnym nic ciekawego się nie dzieje!



$$m\vec{g} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_1 \hat{\rho}$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \hat{\theta}$$

$$F_1 = mg \cos \theta$$

$$F_2 = mg \sin \theta$$

Dlatego wystarczy zapisać równanie ruchu dla składowej transwersalnej

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

Bierzemy składową transwersalną obu stron

$$(m\vec{a})_{\theta} = (m\vec{g} + \vec{N})_{\theta} \leftarrow$$

$$m(2\rho'\theta' + \rho\theta'') = -mg \sin \theta$$

$$\rho = l = \text{const} \rightarrow \rho' = 0$$

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta$$

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \leftarrow$$

To dokładne równanie dla wahadła matematycznego nie ma analitycznego rozwiązania !!

Dla małych wychyleń zachodzi:

$$\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{l},$$

więc dostajemy równanie dla wychyleń kątowych

$$\theta'' \approx -\frac{g}{l} \theta$$

albo na (małe) poprzeczne wychylenia

$$y'' + \omega_0^2 y \approx 0,$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy (dla małych wychyleń !) od wychylenia maksymalnego

Wracamy teraz do wahadła Foucaulta, które będziemy rozpatrywać przy małych wychyleniach w kierunku poprzecznym.

Opuszczam teraz primy (potrzebne dla pochodnych), chociaż jesteśmy wciąż w układzie nieinercyjnym !

Jak dla wahadła matematycznego tu już jest uwzględniona siła grawitacji oraz reakcja więzów (naprężenie linki wahadła).



$$\vec{r}'' + \omega_0^2 \vec{r} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \phi, \omega \sin \phi), \quad \omega = \frac{2\pi}{24h}$$

$$\vec{r}' = (x', y', z')$$

$$\vec{r}'' = (x'', y'', z'')$$

Przy upraszczających założeniach dotyczących stałej wartości $z(t)$,
równania ruchu przyjmują postać:

$$x'' + \omega_0^2 x - 2\omega_1 y' = 0,$$

$$y'' + \omega_0^2 y + 2\omega_1 x' = 0,$$

Układ sprzężonych równań
różniczkowych; *Mathematica*[®]
ma problem z uzyskaniem
analitycznego rozwiązania !

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 10s$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{24h} \sin \phi \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{24h}{\sin \phi} \approx 31h$$

dwie
różne
skale
czasowe

Rozwiązanie ogólne zależy od czterech dowolnych stałych:

$$\begin{aligned}x &= A \cos((\omega_2 - \omega_1)t) - B \sin((\omega_2 - \omega_1)t) \\ &\quad + C \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + D \sin((\omega_1 + \omega_2)t), \\ y &= A \sin((\omega_2 - \omega_1)t) + B \cos((\omega_2 - \omega_1)t) \\ &\quad - C \sin((\omega_1 + \omega_2)t) + D \cos((\omega_1 + \omega_2)t),\end{aligned}\quad \omega_2 \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$$

Warunki początkowe:

$$x(t = 0) = x_0,$$

$$x'(t = 0) = v_{x0},$$

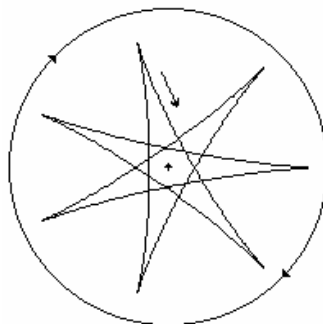
$$y(t = 0) = y_0,$$

$$y'(t = 0) = v_{y0}.$$

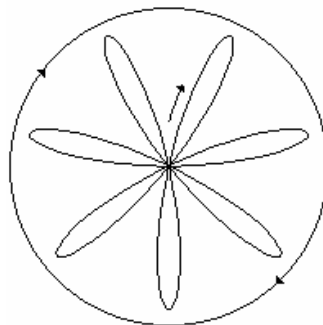
dają konkretne wartości stałych A, B, C i D.

Polecam notatniki z rozwiązaniem równania ruchu i animacjami dla wahadła Foucaulta. W tych notatnikach wprowadzono CZYNNIK=300 zwiększający szybkość obrotu Ziemi wokół własnej osi, by efekty siły Coriolisa stały się bardziej widoczne ! Dwie wersje różnią się tylko warunkami początkowymi, czyli sposobem wprowadzenia wahadła w ruch.

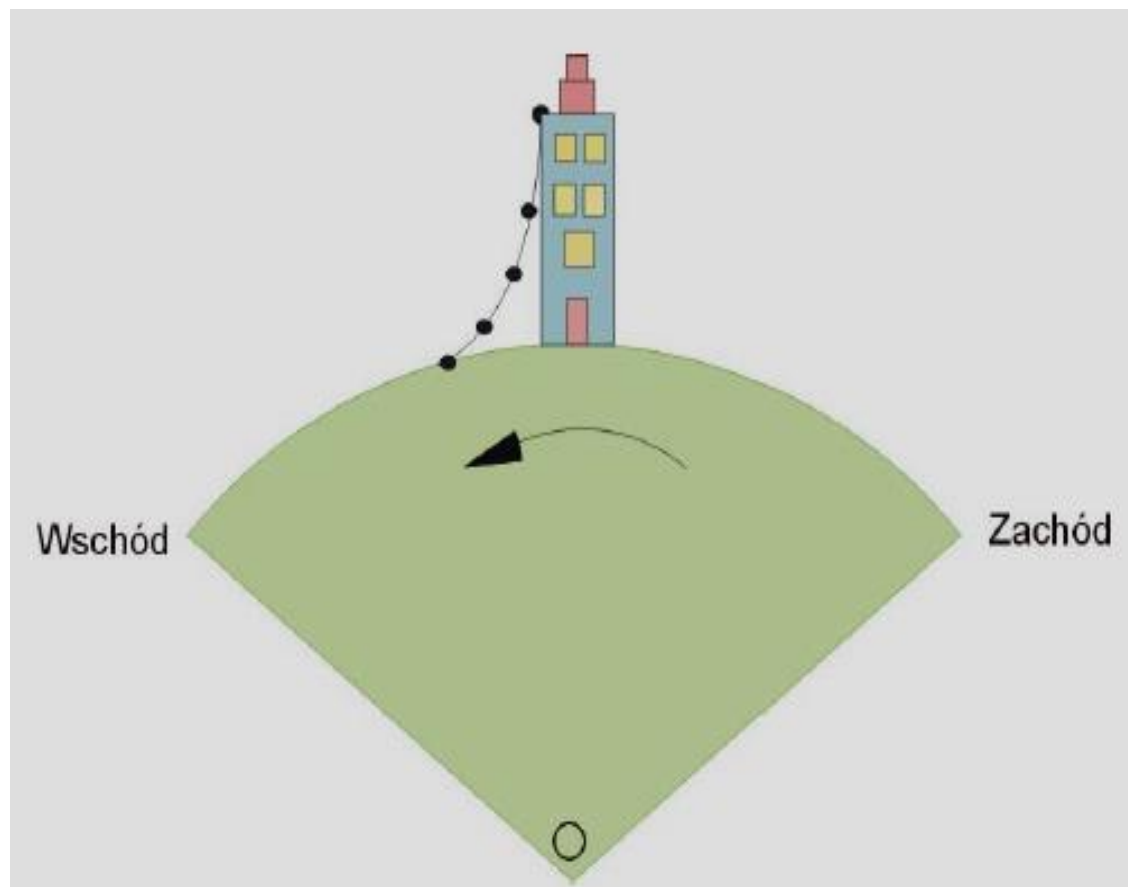
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_foucaulta_CZYNNIK_v1.nb



http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_foucaulta_CZYNNIK_v2.nb



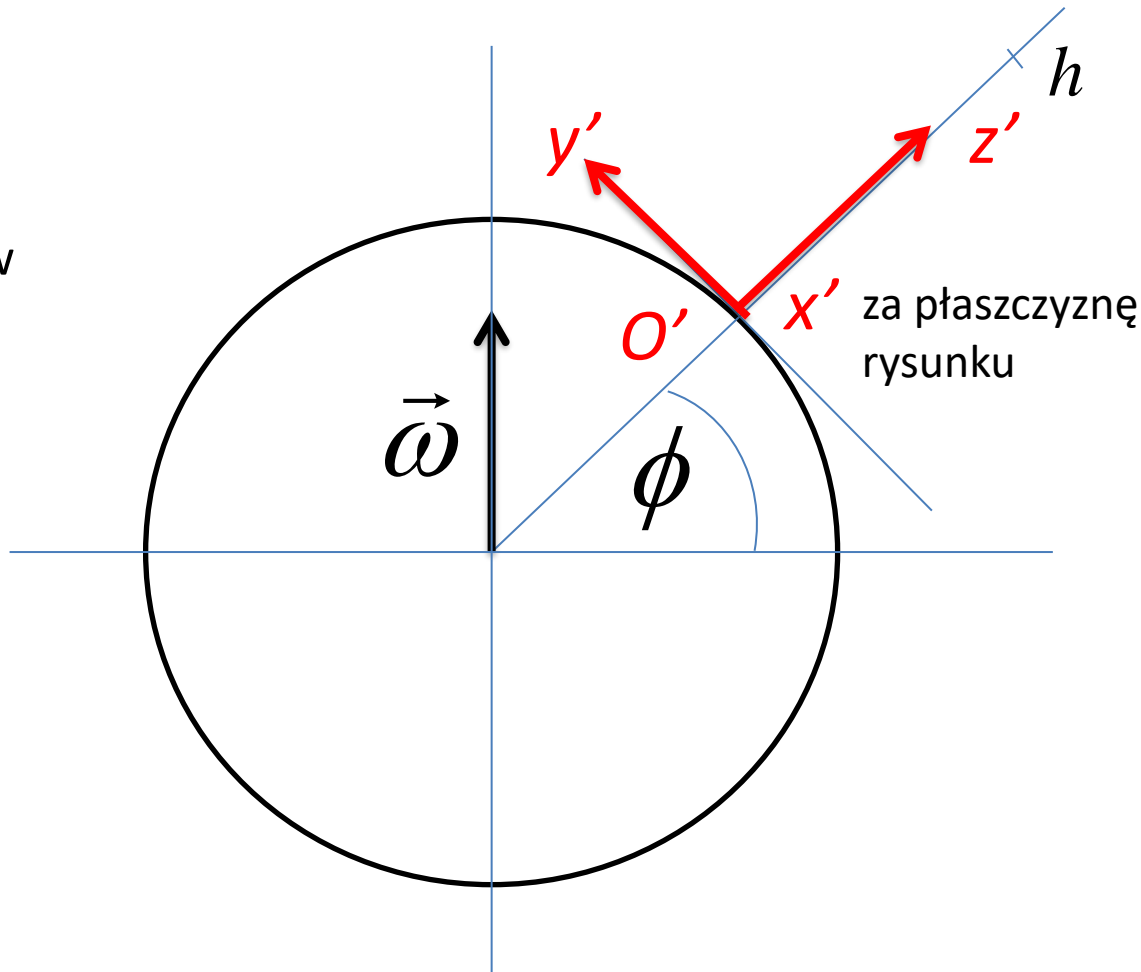
Ciało upuszczone z dużej wysokości nie spada pionowo na Ziemię !



Ta sama sytuacja, jak dla wahadła Foucaulta: teraz próba modelowania spadku swobodnego z wysokości h z uwzględnieniem siły Coriolisa

$\phi=50$ stopni (szerokość geograficzna północna dla Krakowa), $h= 50$ m

Skala na rysunku jest zupełnie przesadzona; w szczególności żadnych efektów związanych z zakrzywieniem powierzchni Ziemi nie będziemy uwzględniać !



Jakie dodatkowe założenia warto wziąć pod uwagę

1. $a_{tr}=0$
2. $\omega=\text{const}$
3. Zmiany wektora \vec{r}' są bardzo małe w stosunku na przykład do promienia Ziemi; dlatego trzeci składnik w nawiasie można uznać za efektywną poprawkę do lokalnego przyspieszenia ziemskiego

$$m\vec{a}' = \vec{F} - \left(\cancel{m\vec{a}_{tr}} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + \cancel{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')} + \cancel{m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'} \right)$$

Na placu boju zostają tylko siła grawitacji (realna siła) oraz siła bezwładności Coriolisa.

$$m\vec{a}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$m\vec{g} = (0, 0, -mg)$$

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \phi, \omega \sin \phi)$$

Opuszczam teraz primy (potrzebuję primy dla pochodnych), chociaż jesteśmy wciąż w układzie nieinercyjnym !

Równania ruchu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}x'' &= 2\omega (y' \sin \phi - z' \cos \phi), \\y'' &= -2 \omega x' \sin \phi, \\z'' &= -g + 2 \omega x' \cos \phi\end{aligned}$$

Warunki początkowe są w tym przypadku szczególnie proste:

$$\begin{aligned}x(t = 0) &= 0, \\x'(t = 0) &= 0, \\y(t = 0) &= 0, \\y'(t = 0) &= 0, \\z(t = 0) &= h, \\z'(t = 0) &= 0.\end{aligned}$$

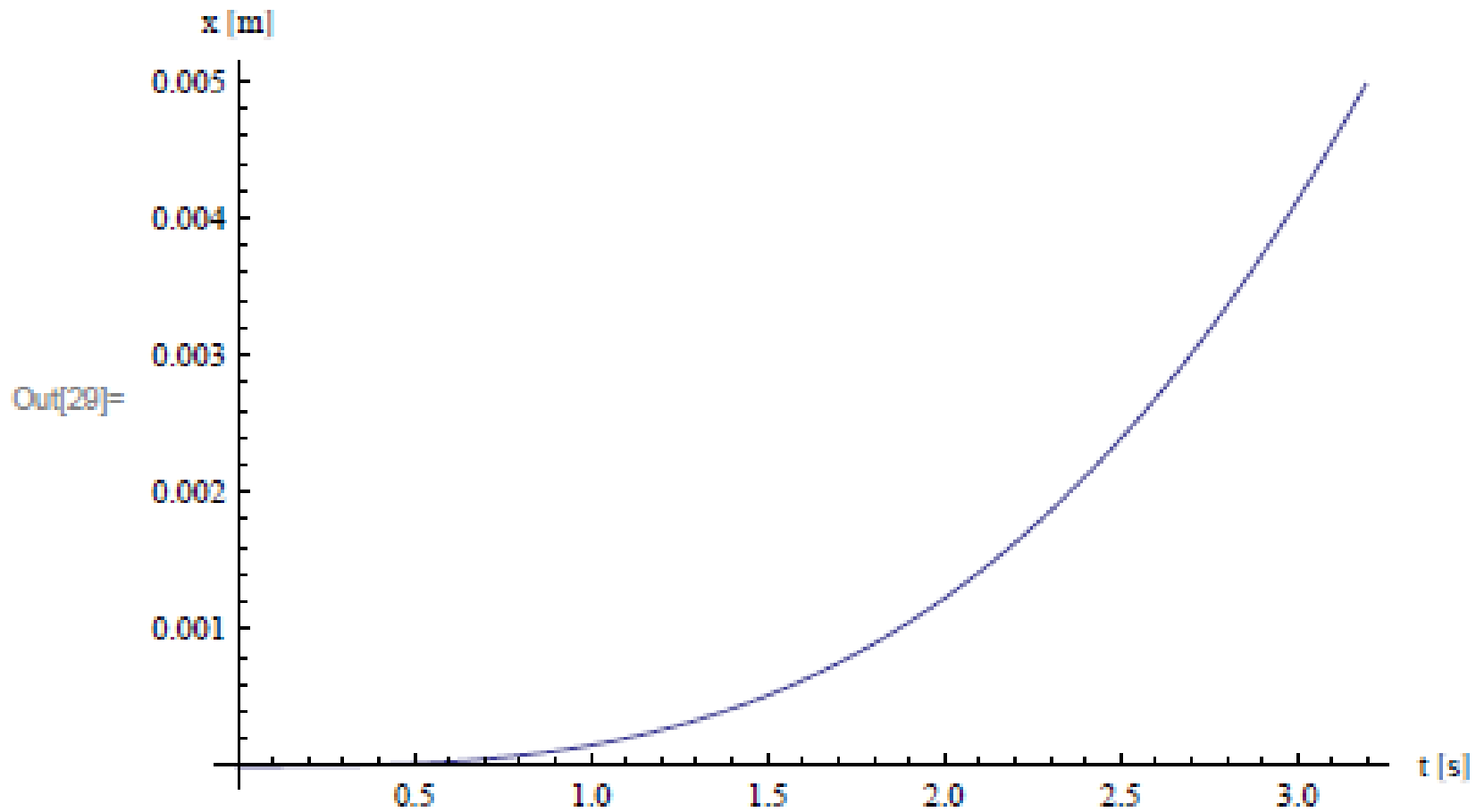
Mathematica[®] nie ma problemu z uzyskaniem analitycznego rozwiązania, które od razu uwzględnia warunki początkowe !

$$x = \frac{g \cos \phi (2t\omega - \sin(2t\omega))}{4\omega^2},$$

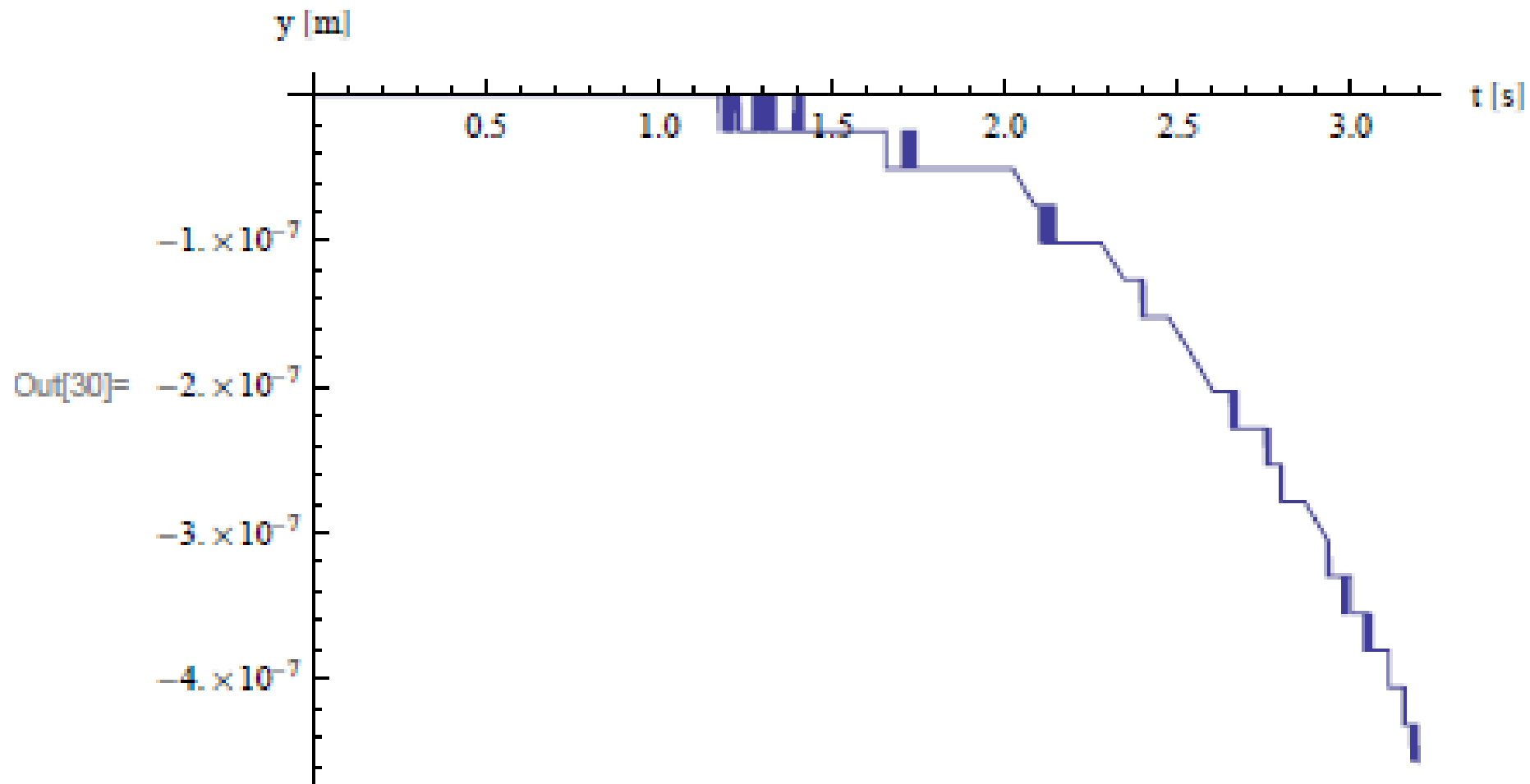
$$y = -\frac{g \sin(2\phi) (-1 + 2t^2\omega^2 + \cos(2t\omega))}{8\omega^2},$$

$$z = \frac{1}{8\omega^2} (-g + 8h\omega^2 - 2gt^2\omega^2 + 2g \cos(2t\omega) \cos^2 \phi) \\ + \frac{1}{8\omega^2} (g (-1 + 2t^2\omega^2) \cos(2\phi)).$$

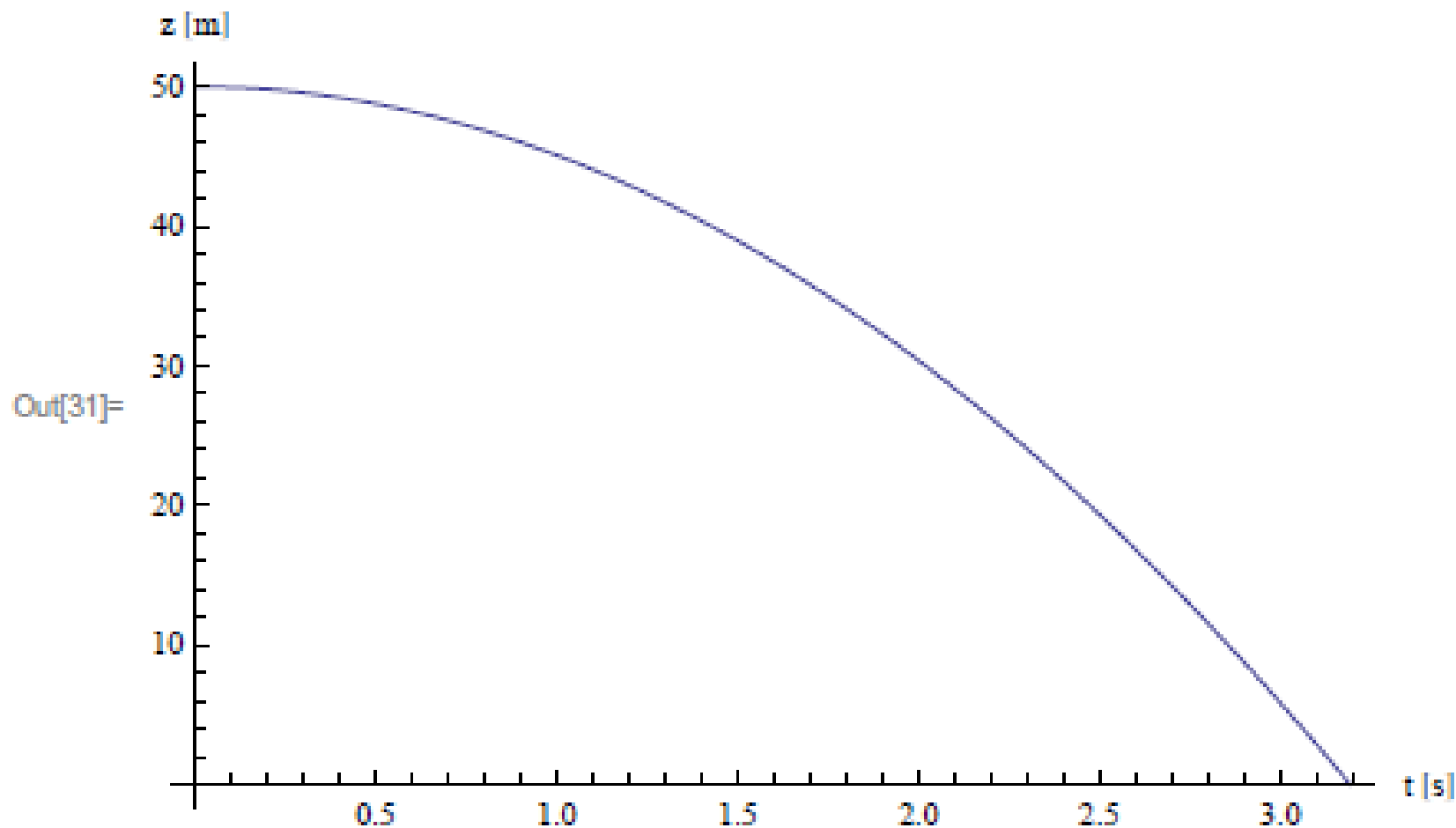
Przypominam, że to rozwiązanie ma sens przy założeniu, że powierzchnia Ziemi jest płaska, a siła grawitacji pozostaje stała !



Mamy (bardzo male) odchylenie w kierunku wschodnim !



Zaniedbywalne odchylenie w kierunku y (północ-południe)



Ruch w kierunku z jest praktycznie taki sam, jak w przypadku bez siły Coriolisa

Polecam notatnik z rozwiązaniem równania ruchu dla spadku swobodnego z uwzględnieniem siły Coriolisa . W tym notatniku wprowadzono CZYNNIK=100 zwiększający szybkość obrotu Ziemi wokół własnej osi, by efekty siły Coriolisa stały się bardziej widoczne !

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/spadek_z_coriolisem_CZYNNIK.nb