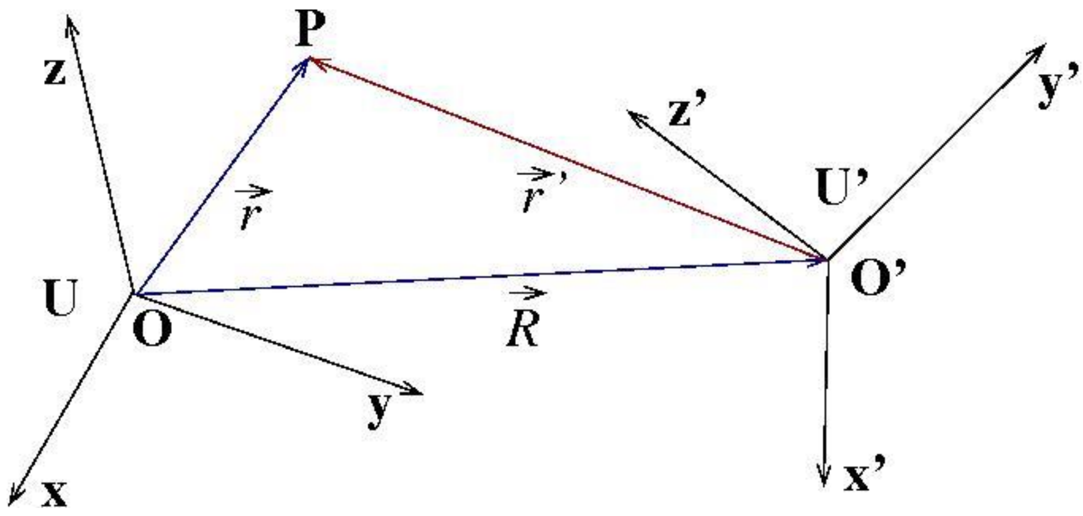
Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak

Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 4

Na poprzednim wykładzie rozważyliśmy związki między prędkością i przyspieszeniem w dwóch układach odniesienia



Wzór na transformację prędkości !

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

prędkość w układzie inercjalnym U

prędkość w układzie nieinercjalnym U’

zmiana prędkości na skutek ruchu translacyjnego układu U’ względem U

zmiana prędkości na skutek ruchu obrotowego układu U’ względem U

Wzór na transformację przyspieszenia i jego składniki !

przyspieszenie na skutek zmiany prędkości kątowej ***ω***

przyspieszenie w układzie nieinercjalnym U’

przyspieszenie Coriolisa

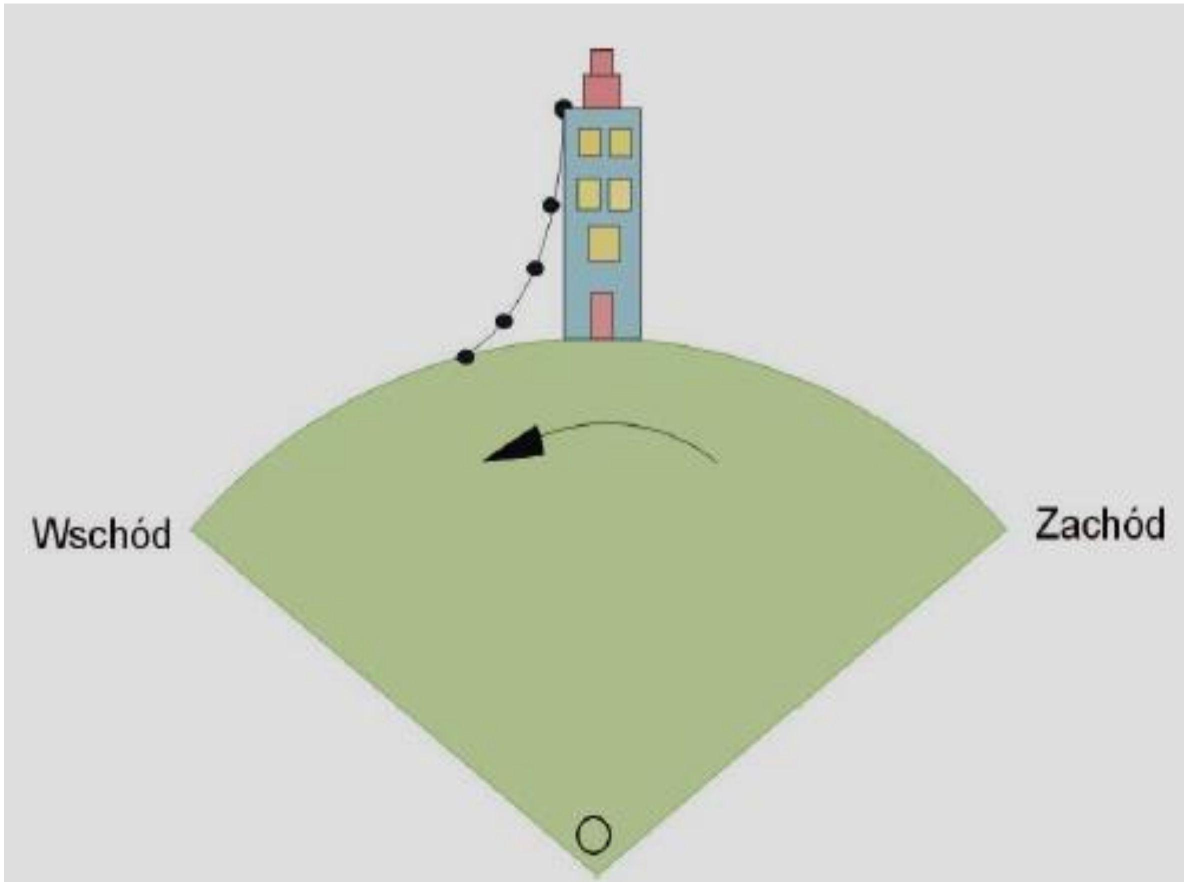
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,'$$

przyspieszenie w układzie inercjalnym U

przyspieszenie na skutek ruchu translacyjnego układu U’ względem U

przyspieszenie dośrodkowe

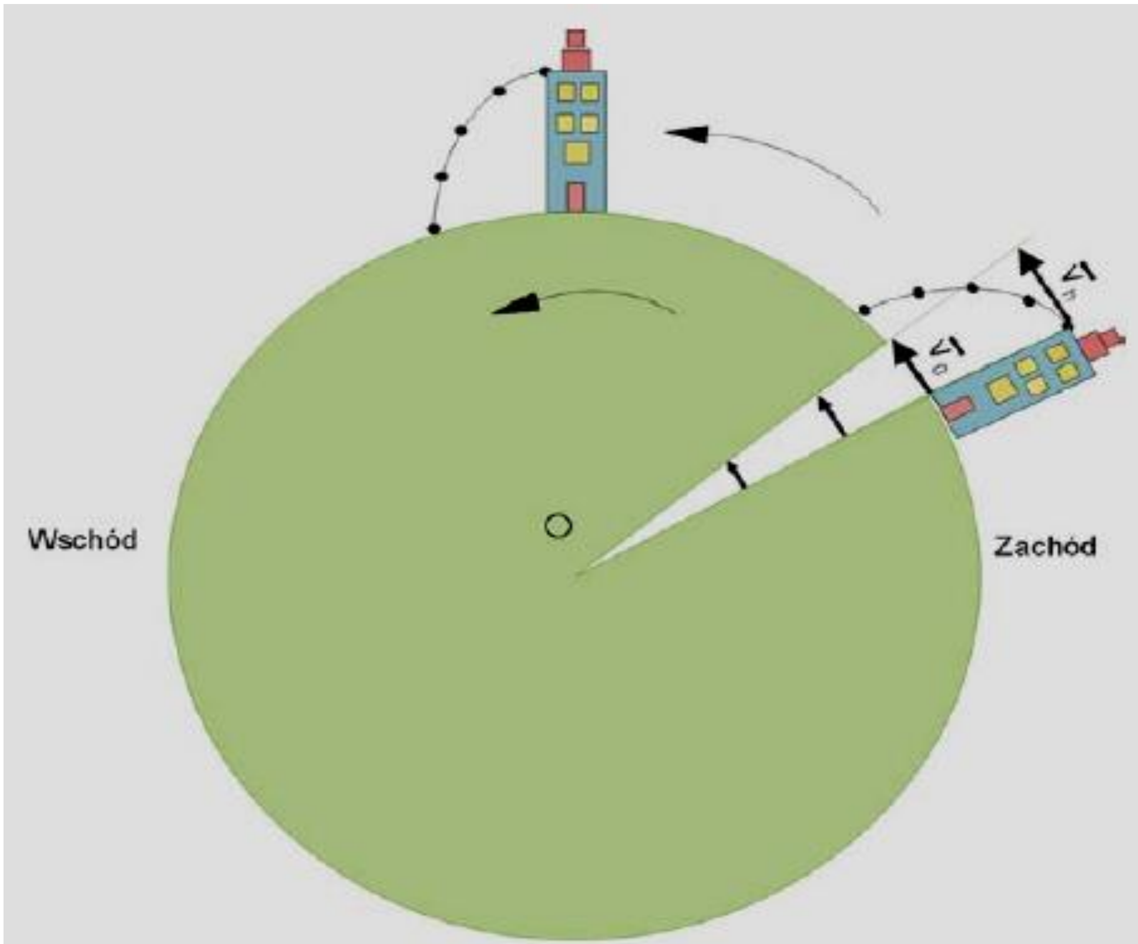
Dlaczego ciało upuszczone z dużej wysokości nie spada pionowo na Ziemię ?



Rysunek ze strony
http://ip.pwsz.glogow.pl/ryszard-matysiak/

W układzie nieinercjalnym związanym z obracającą się Ziemią, działa siła bezwładności Coriolisa !

Ta sama sytuacja z punktu widzenia obserwatora znajdującego się poza Ziemią, w układzie inercjalnym



Rysunek ze strony http://ip.pwsz.glogow.pl/ryszard-matysiak/

Prędkość liniowa jest tym większa, im ciało znajduje się dalej od osi obrotu. To tłumaczy większy „zasięg rzutu” dla obiektu na wieży.

Na obecnym wykładzie zastanowimy się nad własnościami kilku ważnych wielkości

pęd

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$m = const \rightarrow \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = m\frac{d\vec{v}}{d\,t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

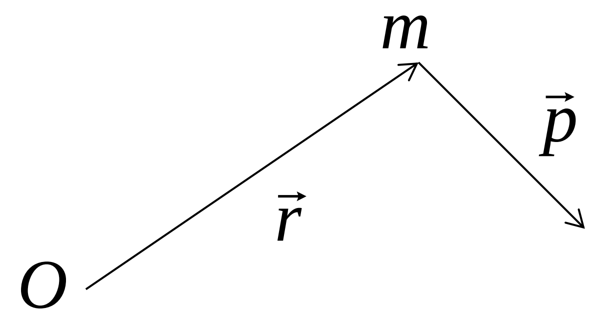
Mamy jedną z wielu zasad zachowania: $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = const$

Stała może być tylko jedna ze składowych (niekoniecznie kartezjańskich) wektora pędu:

$$F_i = 0 \rightarrow p_i = const$$

Przykłady: rzuty w jednorodnym polu grawitacyjnym, wahadło matematyczne (składowa radialna jest stale równa zero)

moment pędu



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

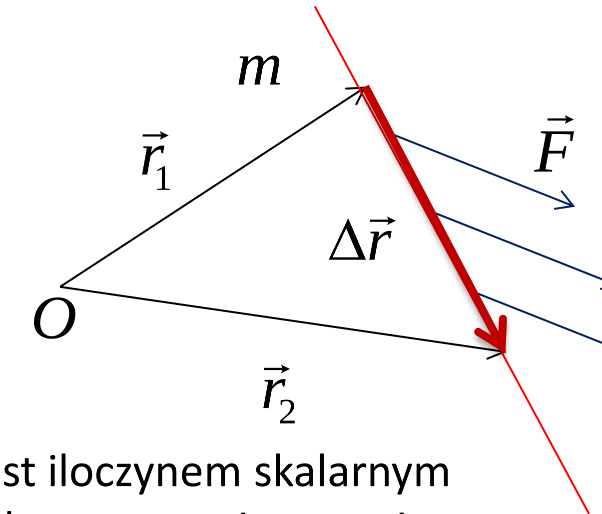
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$ moment siły

Definicje momentu pędu i momentu siły zależą od wyboru początku układu współrzędnych !

Następna zasada zachowania: $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = const$

Tak jak dla pędu, równanie ma charakter wektorowy i zachowana może być tylko jedna ze składowych momentu pędu.

praca



Na początek najprostszy przypadek: stała siła działa na punkt materialny, który zmienia swe położenie, przesuwając się po linii prostej:

$$W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Praca jest iloczynem skalarnym siły i wektora przemieszczenia

Praca jest skalarem !
Praca może być równa zero, chociaż działa siła !

W ogólnym przypadku tor ciała nie musi być prostoliniowy, a siła może zmieniać się od punktu do punktu. Co wtedy ?

Wtedy mamy całkę:

$$W_{12} = \int_{\Gamma(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

W ogólnym przypadku praca zależy nie tylko od początkowego i końcowego położenia, ale także od drogi Γ

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul (J) $J = Nm = kg\,\frac{m^2}{s^2}$

moc

Często interesuje nas szybkość wykonywania pracy. Jest to bardzo ważna wielkość określająca szybkość dostarczania energii, niekoniecznie tylko mechanicznej.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

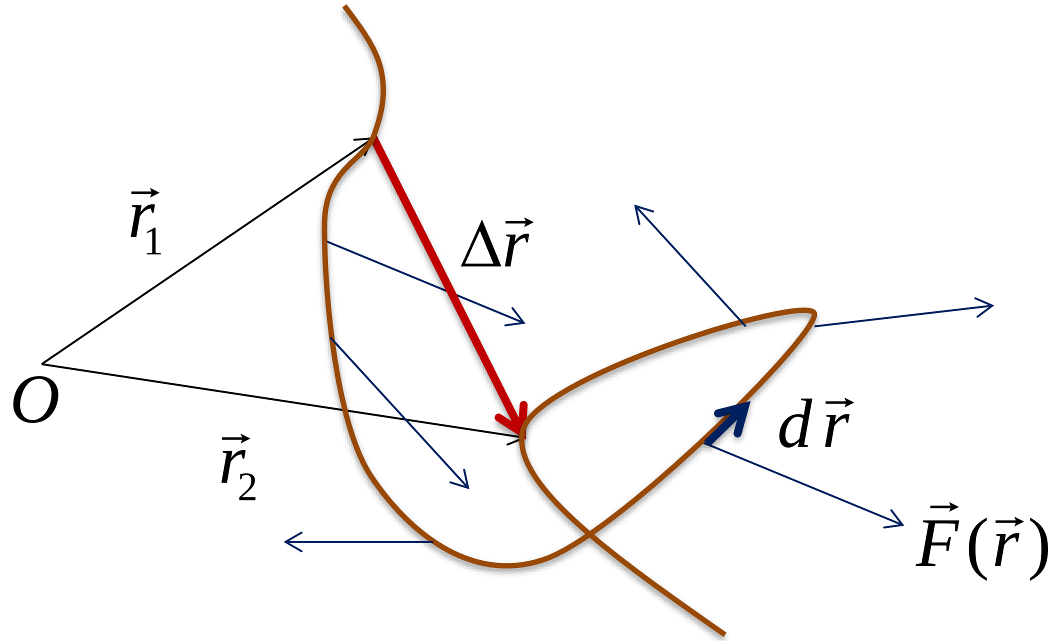
$$\rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Moc jest skalarem. Jednostką mocy w układzie SI jest wat (W)

$$W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = kg\,\frac{m^2}{s^3}$$

Co powoduje praca ?
Zmianę energii kinetycznej !

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}$$

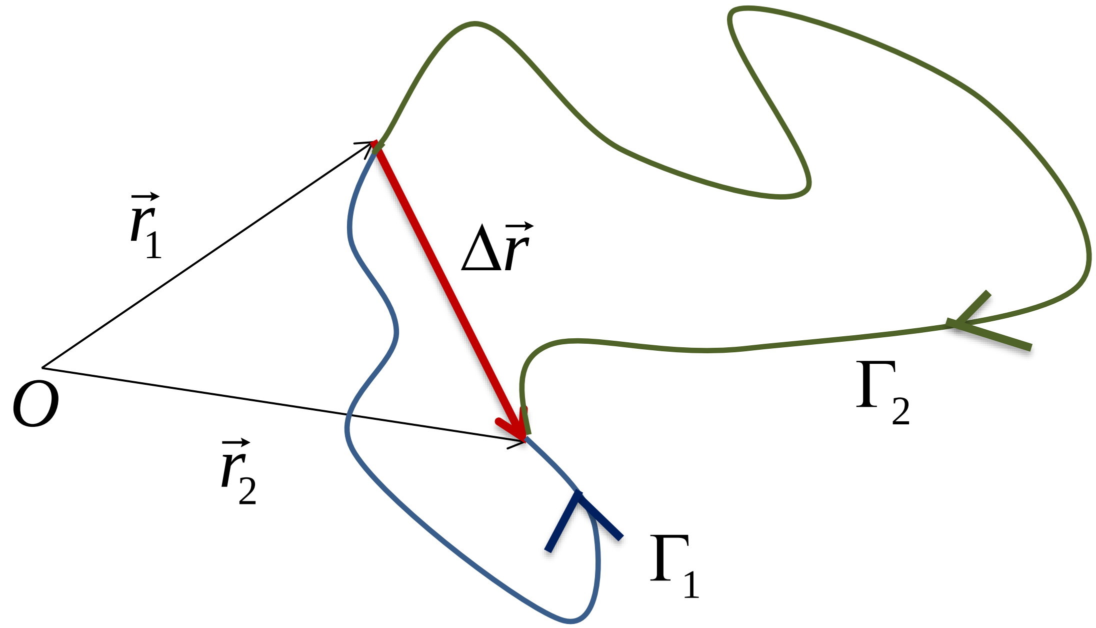


$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\,\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d\,(\vec{v}^{\,2})}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}\right)dt =$$

$$\frac{m}{2}\left(\vec{v}(t_2)\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\vec{v}(t_1)\right)^2 = E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1)$$

Kiedy praca nie zależy od drogi ?



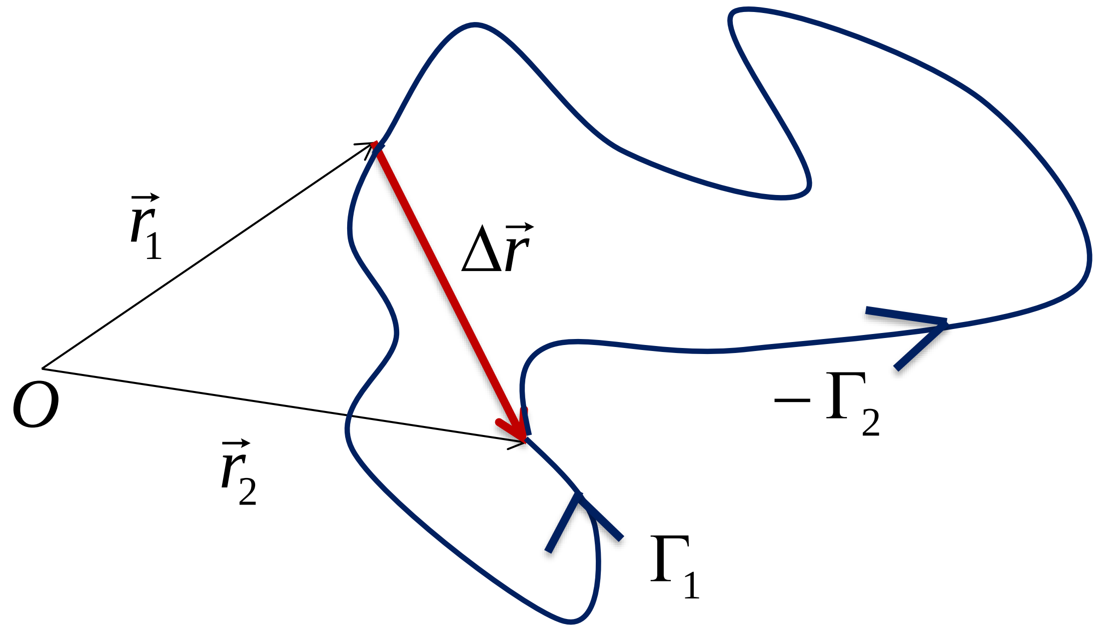
Wtedy musiałoby zachodzić:

$$W_{12} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{-\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Idziemy w drugą stronę !

$$\rightarrow \int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{-\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 = \oint_{\substack{\text{kontur}\\ \text{zamkniety}}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Jeśli praca znika dla dowolnego konturu zamkniętego, to siłę ***F*** nazywamy zachowawczą. Dla takich sił praca nie zależy od drogi.



Przykład (siła sprężysta):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\frac{k}{2}d\,(\vec{r}\,)^2 \rightarrow W_{12} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$$

$$-\frac{k}{2}\vec{r}_2^{\,2} - \left(-\frac{k}{2}\vec{r}_1^{\,2}\right) = \frac{k}{2}\vec{r}_1^{\,2} - \frac{k}{2}\vec{r}_2^{\,2}$$

praca wykonana przez sprężynę !

Jak można scharakteryzować siłę zachowawczą ?
Wykorzystamy w tym celu jedną z wersji twierdzenia Stokesa

$$0 \;=\; \underbrace{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{kontur zamkniety}} = \underbrace{\int \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}}_{\text{powierzchnia rozpieta na konturze}} \rightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = 0$$

rotacja

Rotacja siły zachowawczej wynosi zero ! Jak liczyć rotację ?

$$\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

operator nabla

zapis rotacji we współrzędnych kartezjańskich

Po rozpisaniu na składowe

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} \equiv \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Przykład (może nieco zbyt prosty):

$$\vec{F} = -k\,\vec{r} \rightarrow F_x = -k\,x\,, F_y = -k\,y\,, F_z = -k\,z$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$$

W analizie matematycznej znikanie rotacji (przy pewnych dodatkowych założeniach, które tu milcząco czynimy) oznacza istnienie funkcji skalarnej $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ o następującej własności:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

$$\rightarrow \exists V(\vec{r}) : \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \equiv -\operatorname{grad} V(\vec{r})$$

Znak „minus” to kwestia umowy.

Ten zapis czytamy tak: „siła jest równa minus gradient *V*”. W przypadku sił zachowawczych *V* nazywamy energią potencjalną i często oznaczamy też symbolem E_{pot}.

We współrzędnych kartezjańskich

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \leftrightarrow F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

$\mathrm{V}(\vec{r}) = V(x, y, z)$

Związek geometryczny między *V* i grad *V*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \rightarrow$$

$$dV = \nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Jeśli wybierzemy $d\vec{r}$ tak, by leżało na powierzchni *V(x,y,z)=cons*t, to przy zmianie położenia nie ma zmiany *V*:

$$0 = dV = \nabla V \cdot d\vec{r} \rightarrow \nabla V \perp \text{powierzchnia} \, (V = const)$$

Dlatego grad *V* jest wektorem prostopadłym do powierzchni *V=const* i wskazuje kierunek rosnącego *V*. Z kolei siła (- grad *V)* wskazuje kierunek malejącego *V*.

Związek między pracą siły zachowawczej a energią potencjalną

$$W_{12} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV =$$

$$= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Widać jasno niezależność od drogi.

Energia potencjalna nie jest jednoznacznie określona. Możemy jednak każdemu punktowi przestrzeni przypisać liczbę

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

gdzie $V(\vec{r}_0)$ jest dowolną stałą.

Przykłady:

- Siła wynikająca z newtonowskiego prawa powszechnego ciążenia. Nieruchoma masa m_1, znajdująca się w początku układu współrzędnych działa na masę m_2

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \to V(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|} \quad \left(V(\infty) = 0\right)$$

- Siła wynikająca z jednorodnego ziemskiego pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg\,\hat{z} \to V(\vec{r}) = mg\,z \quad \left(V(z=0) = 0\right)$$

- Siła, jaką działa na masę m nieważka sprężyna o zaniedbywalnej długości, której drugi koniec zaczepiono w początku układu współrzędnych

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r} \to V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k\vec{r}^{\,2} \quad \left(V(0) = 0\right)$$

Zbierzmy to, co wiemy o pracy W_{12}

$$W_{12} = E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) = E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2) \rightarrow$$

$$E_{kin}(\vec{r}_2) + E_{pot}(\vec{r}_2) = E_{kin}(\vec{r}_1) + E_{pot}(\vec{r}_1) \rightarrow$$

$$E_{tot} \equiv E_{kin}(\vec{r}) + E_{pot}(\vec{r}) = const$$

Jest to kolejna zasada zachowania (bardzo ważna):
zasada zachowania energii !

Pamiętajmy, że dotyczy sił zachowawczych !

Zasada zachowania energii nie daje informacji o czasie, w którym ciało przemieszcza się między punktem 1 a punktem 2.

Przykład:

Na jaką wysokość doleci kamień wyrzucony z powierzchni Ziemi pionowo w górę z prędkością początkową *v*, jeśli zaniedbujemy opory ruchu ?

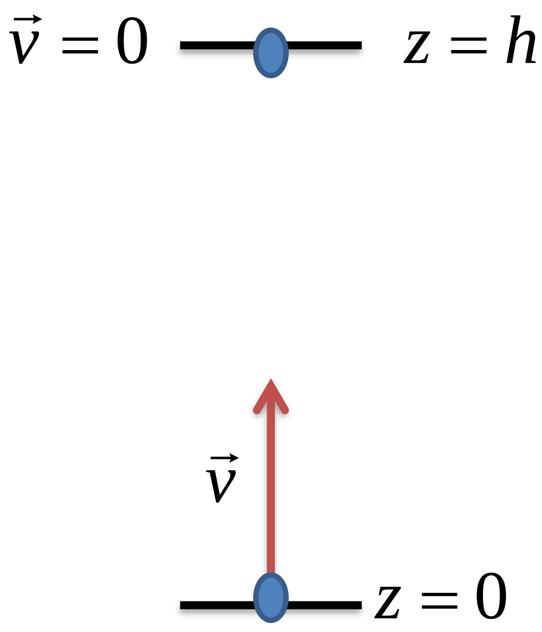
$$E_{kin}(z=0) = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$$

$$E_{pot}(z=0) = 0$$

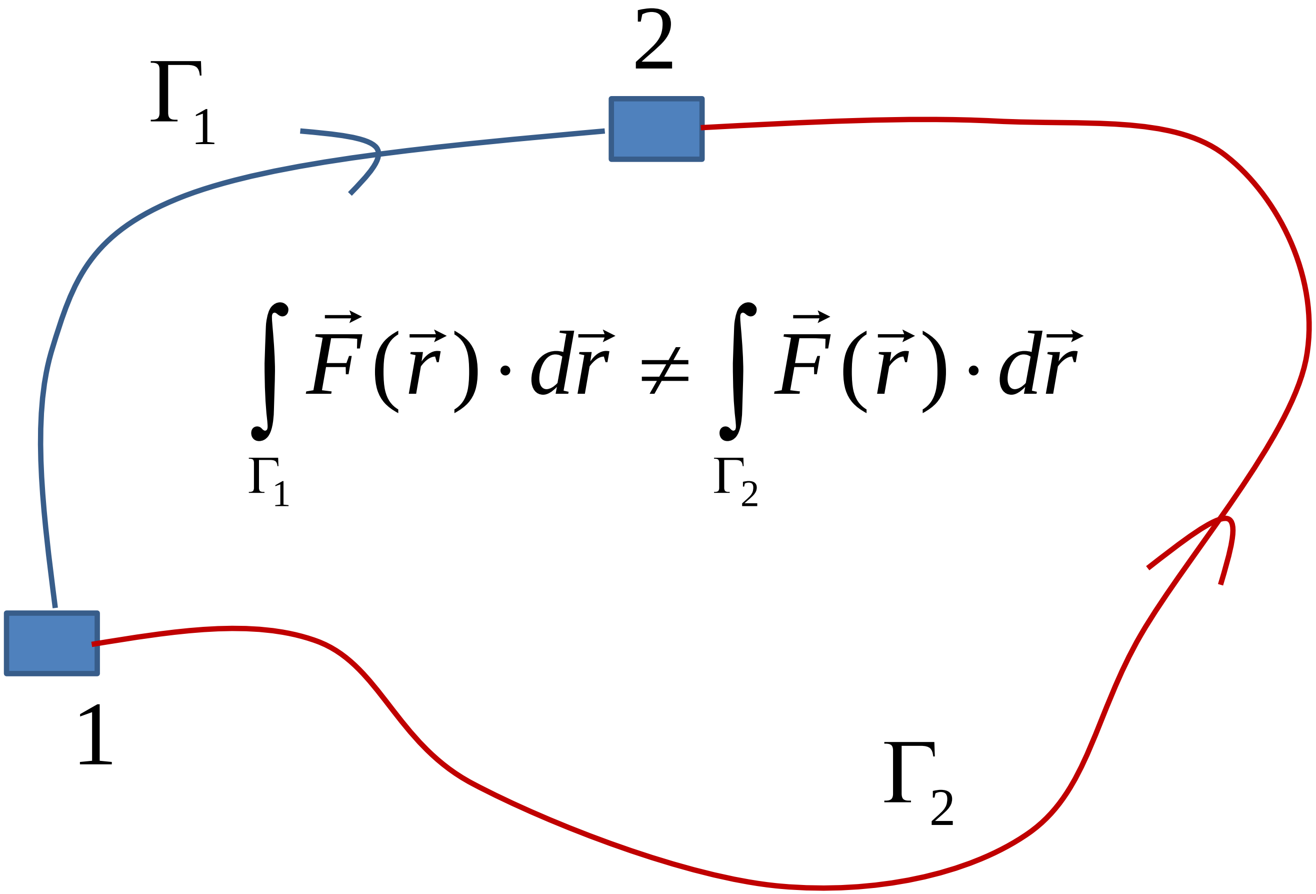
$$E_{kin}(z=h) = 0$$

$$E_{pot}(z=h) = mgh$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} = mgh \rightarrow h = \frac{\vec{v}^{\,2}}{2g}$$



Nie wszystkie siły są zachowawcze – tarcie poślizgowe jest najlepszym przykładem. Praca (ta w potocznym tego słowa znaczeniu i w sensie fizycznym) zależy od drogi.
Przesuwamy skrzynię po poziomej jednorodnej podłodze.

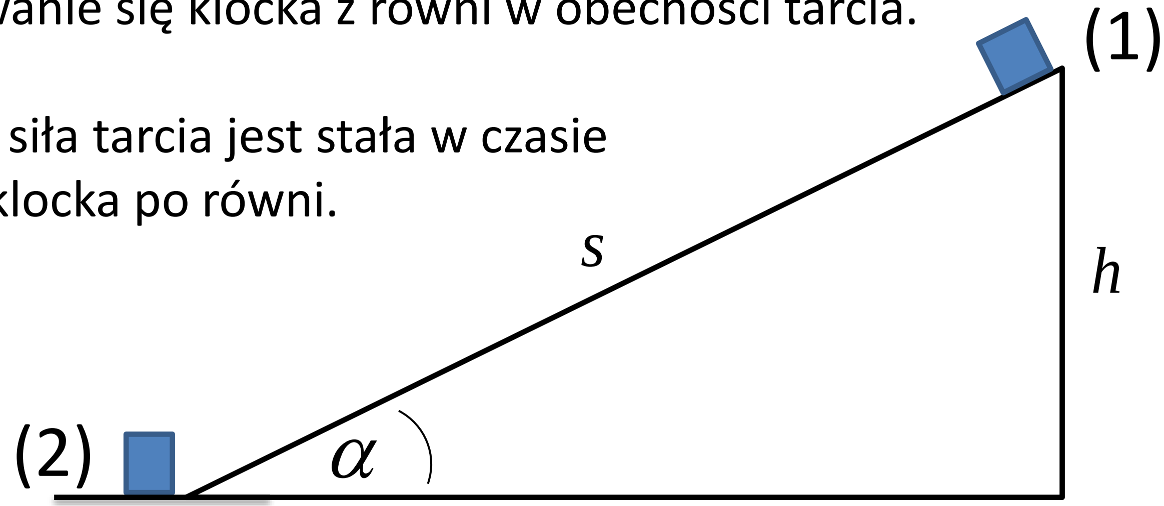


$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \neq \int_{\Gamma_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Jeśli działa siła niezachowawcza, to zmiana energii całkowitej układu jest równa pracy tej siły.

Przykład: zsuwanie się klocka z równi w obecności tarcia.

Zakładamy, że siła tarcia jest stała w czasie całego ruchu klocka po równi.



$$E_{kin}(1) = 0 \,,\, E_{pot}(1) = mgh$$

$$E_{kin}(2) > 0 \,,\, E_{pot}(2) = 0$$

$$E_{tot}(2) \equiv E_{kin}(2) + E_{pot}(2) = E_{kin}(1) + E_{pot}(1) + W_{Tarcia}$$

$$\equiv E_{tot}(1) + W_{tarcia} = E_{tot}(1) - T\,s$$

Do tej pory zajmowaliśmy się w zasadzie pojedynczym punktem materialnym (z wyjątkiem III zasady dynamiki Newtona).

Wprowadzimy teraz kilka pojęć dla **N oddziałujących punktów materialnych**.

Weźmy punkt numer *i*. Może na niego działać siła zewnętrzna, która ma źródło poza układem N cząstek, ale także siła pochodząca od innych cząstek układu, czyli siła wewnętrzna. Zakładamy, że punkt materialny sam na siebie nie działa.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew} + \vec{F}_i^{\,zew}$$

II zasada dynamiki dla cząstki nr *i*

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew} \right) + \sum_i \vec{F}_i^{\,zew}$$

Teraz sumujemy po *i* obie strony poprzedniego równania

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew} \right) = \sum_{j<i} \left(\vec{F}_{ji}^{\,wew} + \vec{F}_{ij}^{\,wew} \right) = 0,$$

gdzie wykorzystaliśmy III zasadę dynamiki Newtona.

Definiując całkowity pęd układu $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, dostajemy

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\,zew}$$

Pochodna całkowitego pędu układu po czasie jest równa całkowitej sile zewnętrznej działającej na układ.

W szczególności $\sum_i \vec{F}_i^{\,zew} = 0 \rightarrow \vec{P} = const$

Uwaga: pędy poszczególnych punktów materialnych mogą się zmieniać !

Dodatkowe definicje:

Masa całkowita układu: $$M = \sum_i m_i$$

Środek masy układu: $$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \equiv \vec{r}_{cm}$$

Środek masy układu porusza się tak, jak pojedynczy punkt materialny o masie *M* pod wpływem całkowitej siły zewnętrznej. Siły wewnętrzne nie mają wpływu na ruch środka masy.

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{zew} \equiv \vec{F}_{tot}^{zew}$$

$$\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt} \equiv M\vec{V}$$

Przykłady zastosowania zasady zachowania pędu
→ ruch rakiety
→ zderzenia elastyczne i nieelastyczne
→ rozpady jąder atomowych i cząstek elementarnych

Zasada zachowania pędu jest spełniona także w świecie cząstek elementarnych. Razem z zasadą zachowania energii stanowi podstawowe narzędzie do opisu kinematyki reakcji jądrowych i reakcji z udziałem cząstek elementarnych.

Definicja pędu w STW wymaga modyfikacji:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}$$

(*c* to wartość prędkości światła w próżni)

Dodatkowo okazuje się, że cząstki bezmasowe też mają pęd.

Zmiana definicji (i sensu) energii w STW :

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} = \sqrt{(c\vec{p})^2 + (mc^2)^2}$$

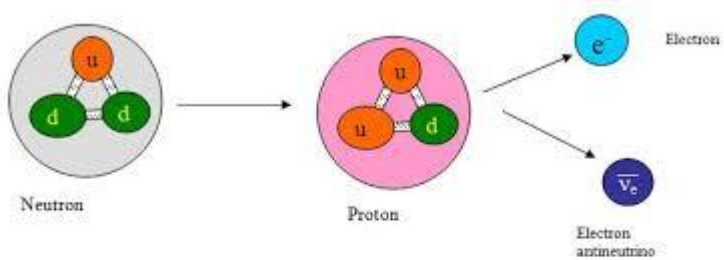
nierelatywistyczna
energia kinetyczna

relatywistyczna energia
całkowita: suma relatywistycznej
energii kinetycznej i spoczynkowej

Słynny zapis mówi o równoważności masy i energii:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} \equiv m_r c^2$$

Przykład: rozpad swobodnego neutronu w spoczynku



$$n \rightarrow p + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

neutron

proton

elektron

antyneutrino elektronowe

Przed rozpadem:

$$E = m_n c^2$$

energia spoczynkowa neutronu

$$\vec{p} = 0$$

całkowity pęd układu wynosi zero

Po rozpadzie:

$$E = \sqrt{\left(c\,\vec{p}_p\right)^2 + \left(m_p\,c^2\right)^2} + \sqrt{\left(c\,\vec{p}_e\right)^2 + \left(m_e\,c^2\right)^2}$$

$$+ \sqrt{\left(c\,\vec{p}_{\overline{\nu}_e}\right)^2 + \left(m_{\overline{\nu}_e}\,c^2\right)^2} \approx$$

$$\sqrt{\left(c\,\vec{p}_p\right)^2 + \left(m_p\,c^2\right)^2} + \sqrt{\left(c\,\vec{p}_e\right)^2 + \left(m_e\,c^2\right)^2} + c\left|\vec{p}_{\overline{\nu}_e}\right|$$

Energia spoczynkowa neutronu zamienia się w energię całkowitą wylatujących cząstek: protonu, elektronu i antyneutrina elektronowego

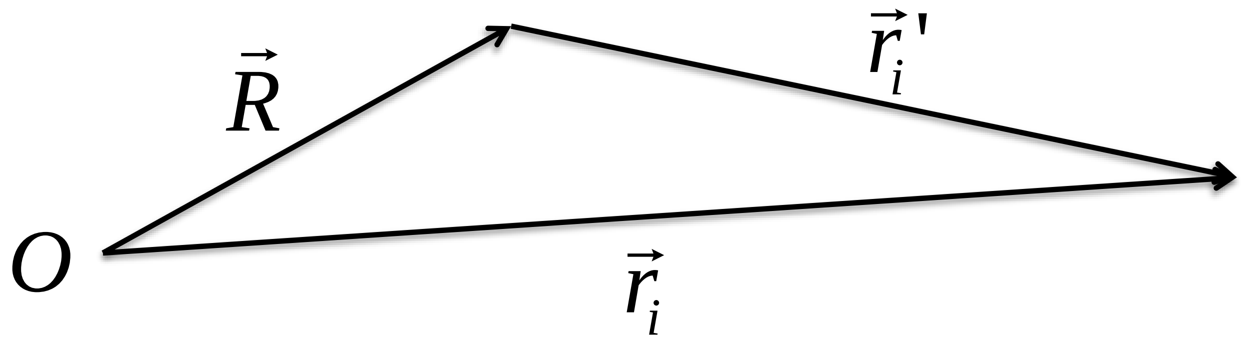
$$0 = \vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_{\overline{\nu}_e}$$

Całkowity pęd jest sumą wektorową pędów wylatujących cząstek

Wracamy do wielkości nierelatywistycznych

Całkowity moment pędu układu: $$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Całkowity moment pędu układu można zapisać w postaci sumy momentu pędu środka masy i wewnętrznego momentu pędu liczonego względem środka masy



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i\,', \left(\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \vec{v}_i\,' = \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt} \right)$$

$$\rightarrow \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{V} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i'$$

$$= M \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times \vec{v}_i'$$

$$= \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \vec{R} \times \sum_i m_i \vec{v}_i'$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_{0} \right)$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

moment pędu
środka masy

moment pędu układu N punktów
materialnych względem środka masy

W analogiczny sposób można rozbić na dwa składniki energię kinetyczną układu punktów materialnych.

Zachodzi:

$$E_{kin} = \sum_i m_i \frac{\vec{v}_i^{\,2}}{2} = \ldots = M \frac{\vec{V}^2}{2} + \sum_i m_i \frac{\vec{v}_i'^{\,2}}{2}$$

energia
kinetyczna
środka masy

energia kinetyczna
ruchu względem
środka masy

Teraz policzymy pochodną po czasie całkowitego momentu pędu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i}_{0} + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \equiv$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{\,zew} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew} \right)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,zew} + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew}$$

$$\equiv \vec{M}^{\,zew} + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}^{\,wew}$$

$$= \vec{M}^{\,zew} + \sum_{i<j} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}^{\,wew} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}^{\,wew} \right)$$

$$= \vec{M}^{\,zew} + \sum_{i<j} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ji}^{\,wew} = \vec{M}^{\,zew},$$

Uwaga: ostatnia równość zachodzi tylko wtedy, gdy siły wewnętrzne spełniają zasadę „akcja-reakcja” i działają wzdłuż wektora wzajemnego położenia cząstek *i* oraz j

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zew}$$

Dostajemy więc równanie wyprowadzone przy założeniu, że wszystkie wielkości były mierzone względem inercjalnego. Oba wektory są liczone względem punktu O spoczywającego w jakimś układzie inercjalnym !

$$\frac{d\vec{L}(cm)}{dt} = \vec{M}^{zew}(cm)$$

Okazuje się jednak, że podobnie wyglądające równanie obowiązuje, jeśli oba wektory są liczone względem środka masy – **nawet wtedy, gdy porusza się on z przyspieszeniem względem układu inercjalnego !**

Dostajemy kolejną zasadę zachowania dla układu N punktów materialnych

$$\vec{M}^{zew} = 0 \to \vec{L} = const$$

W wersji dla układu inercjalnego:

Jeśli całkowity moment sił działających na układ wynosi zero, to całkowity moment pędu układu jest stały w czasie.

$$\vec{M}^{zew}(cm) = 0 \to \vec{L}(cm) = const$$

W wersji, gdy wektory całkowitego momentu pędu i całkowitego momentu sił zewnętrznych mierzone są względem środka masy.

Mówiąc o układzie N punktów materialnych wprowadziliśmy proste definicje

masy całkowitej układu: $$M = \sum_i m_i$$

oraz środka masy układu: $$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

Często jednak wygodnie jest zastąpić model zbioru punktowych mas przez ciągły rozkład masy. Wtedy powyższe definicje należy zapisać w postaci całek:

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\, dV \qquad M = \int_S \sigma(\vec{r})\, dS \qquad M = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\, dl$$

objętościowy rozkład masy — powierzchniowy rozkład masy — liniowy rozkład masy

Środek masy liczymy też przy pomocy odpowiednich całek (objętościowej, powierzchniowej i liniowej):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_S \vec{r}\,\sigma(\vec{r})\,dS \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_\Gamma \vec{r}\,\lambda(\vec{r})\,dl$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_V x\,\rho(\vec{r})\,dV \qquad x_{cm} = \frac{1}{M}\int_S x\,\sigma(\vec{r})\,dS \qquad x_{cm} = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\,\lambda(\vec{r})\,dl$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_V y\,\rho(\vec{r})\,dV \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int_S y\,\sigma(\vec{r})\,dS \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\,\lambda(\vec{r})\,dl$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int_V z\,\rho(\vec{r})\,dV \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\int_S z\,\sigma(\vec{r})\,dS \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\,\lambda(\vec{r})\,dl$$

objętościowy rozkład masy

powierzchniowy rozkład masy

liniowy rozkład masy

Polecam notebooki, w których liczone są środki masy dla przykładowych ciągłych rozkładów mas

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/srodek_masy_krzywych.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/srodek_masy_figury_plaskiej.nb

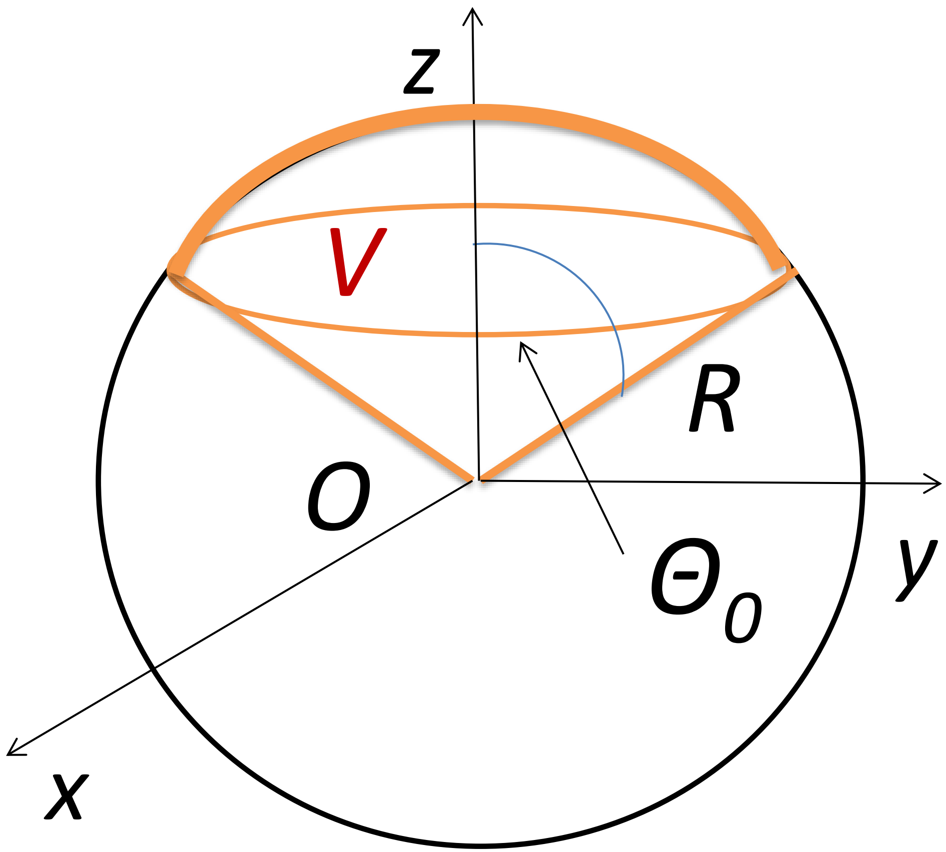
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/srodek_masy_bryly_przestrzennej.1.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/srodek_masy_bryly_przestrzennej.2.nb

Przykład: środek masy wycinka kuli o promieniu *R* i kącie rozwarcia Θ_0.

Podstawą obliczeń jest wybór rozsądnej parametryzacji → współrzędne sferyczne

$$V = \{(x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta) \in R^3 : r \in [0, R],\ \theta \in [0, \theta_0],\ \phi \in [0, 2\pi]\}$$



wzór na objętość
wycinka kuli

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 = const$$

$$M = \int_V \rho_0 dV = \int_0^R \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \underbrace{dr\, r^2 d\theta \sin\theta\, d\phi}_{dV}\, \rho_0 = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\theta_0)\, \rho_0$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_V x\rho(\vec{r})\, dV = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} r\sin\theta\cos\phi\, \rho_0\, \underbrace{dr\, r^2 d\theta \sin\theta\, d\phi}_{dV} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_V y\rho(\vec{r})\, dV = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} r\sin\theta\sin\phi\, \rho_0\, \underbrace{dr\, r^2 d\theta \sin\theta\, d\phi}_{dV} = 0$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int_V z\rho(\vec{r})\, dV = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} r\cos\theta\, \rho_0\, \underbrace{dr\, r^2 d\theta \sin\theta\, d\phi}_{dV} = \frac{3}{8} R\, (1 + \cos\theta_0)$$

półkula $\leftrightarrow$ $\Theta_0 = \pi/2$ Cała kula $\leftrightarrow$ $\Theta_0 = \pi$

Półkula $\leftrightarrow$ $\Theta_0 = \pi/2$

$$x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} = 0$$

$$z_{cm} = \frac{3}{8}R\,(1 + \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{8}R$$

Cała kula $\leftrightarrow$ $\Theta_0 = \pi$

$$x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} = 0$$

$$z_{cm} = \frac{3}{8}R\,(1 + \cos\pi) = 0$$

Co za odkrycie !!