Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak

Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 6

Na tym wykładzie będziemy zajmować się opisem ***bryły sztywnej***.

Jest to z definicji zbiór punktów materialnych o tej własności, że jego kształt się nie zmienia. Odległości między każdą parą punktów tworzących ten układ pozostają stałe w czasie (idealizacja !)

Będziemy korzystać z wyników uzyskanych na poprzednich wykładach, gdzie zajmowaliśmy się ogólnym układem wielu (lub nieskończenie wielu) punktów materialnych.

Przydadzą się też wzory na transformację prędkości między układem inercjalnym *U* i dowolnym układem odniesienia *U'*.

Całkowity pęd układu punktów materialnych

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{zew}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{zew} = 0 \rightarrow \vec{P} = const$$

Masa całkowita układu: $$M = \sum_i m_i \qquad \left(M = \int_\Omega d\,m \right)$$

Środek masy układu: $$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \left(\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_\Omega \vec{r}\, d\,m \right)$$

$$M \frac{d^{\,2} \vec{r}_{cm}}{d\,t^2} = \sum_i \vec{F}_i^{\,zew} \equiv \vec{F}_{tot}^{\,zew}$$

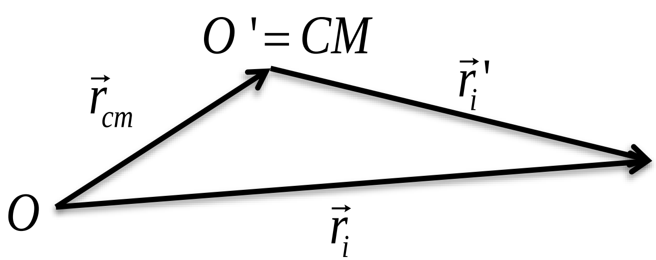
całkowita siła zewnętrzna

$$\vec{P} = M \frac{d\,\vec{r}_{cm}}{d\,t} \equiv M\,\vec{V}$$

prędkość środka masy

Całkowity moment pędu bryły sztywnej jest sumą momentu pędu środka masy oraz momentu pędu liczonego względem środka masy (CM) :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt}$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$$

jeśli wewnętrzne siły są centralne

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zew} + \sum_{i<j} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ji}^{wew} = \vec{M}^{zew}$$

całkowity moment sił zewnętrznych

$$\vec{M}^{zew} = 0 \rightarrow \vec{L} = const$$

zasada zachowania całkowitego momentu pędu układu

Zanim zajmiemy się **ruchem** bryły sztywnej, zastanówmy się nad jej … **spoczynkiem**. Bardzo ważnym zagadnieniem praktycznym jest równowaga bryły sztywnej. Prawidłowa konstrukcja budynków, mostów, maszyn to rzeczywiście sprawa życia i śmierci !

Tymi zagadnieniami zajmuje się szczegółowo dział mechaniki zwany statyką. Na pewno jest to jeden z ulubionych przedmiotów Państwa kolegów na kierunkach technicznych.

Na stronie
http://kmm.p.lodz.pl/dydaktyka/cwiczenia/MOS_Bud.pdf
można było znaleźć m.in. zadania przykładowe.

Mechanika ogólna – statyka

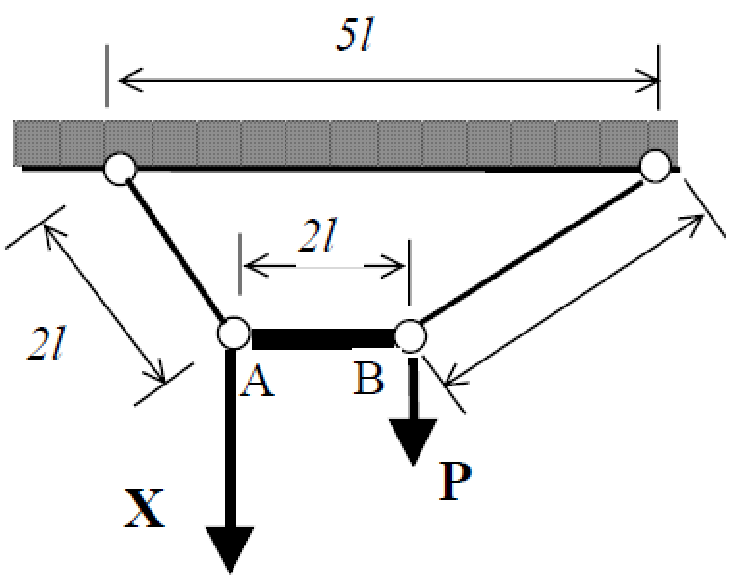
kierunek Budownictwo, sem. II

materiały pomocnicze do ćwiczeń

opracowanie: dr inż. Piotr Dębski , dr inż. Irena Wagner

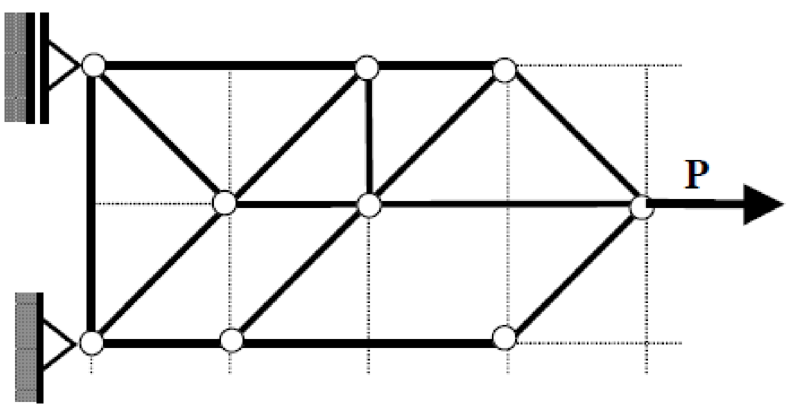
Początek cytatu …

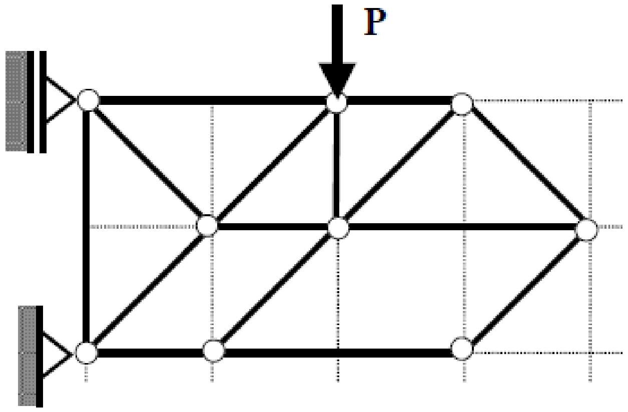
Znaleźć wartość siły X, przy której pręt AB pozostaje poziomy.



Rozwiązywanie kratownic płaskich

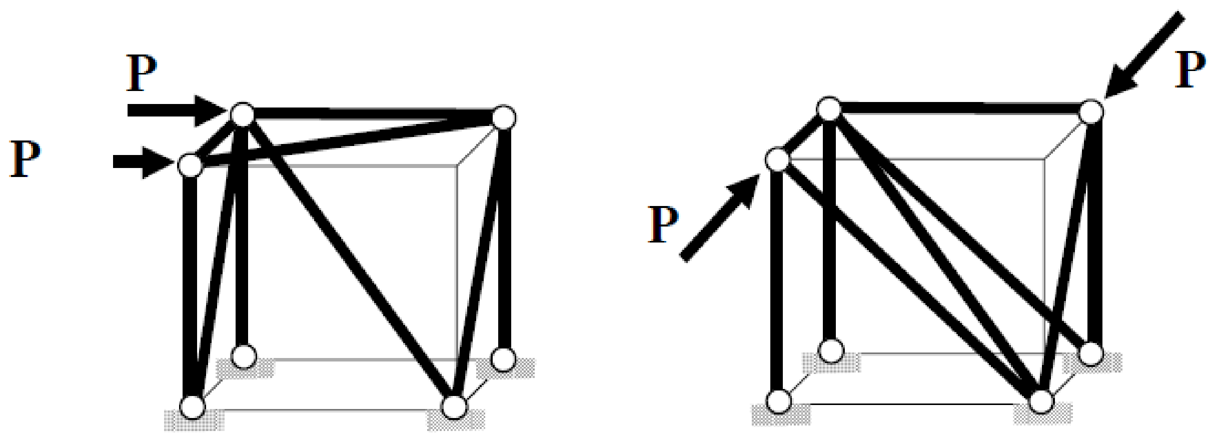
- pręty zerowe
- wyznaczanie sił w prętach metodą równoważenia węzłów
- wyznaczanie sił po uprzednim wyznaczenie reakcji





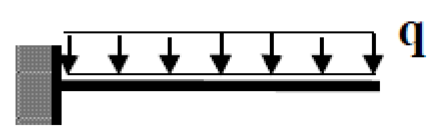
Rozwiązywanie kratownic przestrzennych

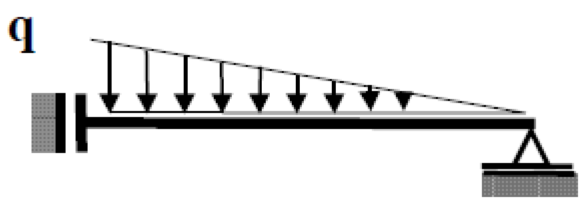
- pręty zerowe
- wyznaczanie sił w prętach metodą równoważenia węzłów



Wyznaczanie reakcji w belkach

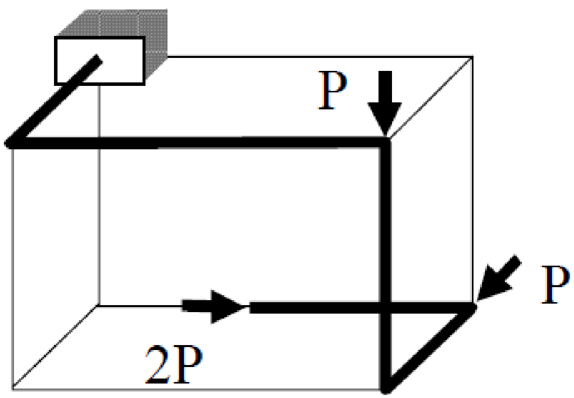
- obciążenia skupione i ciągłe
- belki pojedyncze
- belki złożone - rodzaje połączeń i ich reakcje
- belki ze skratowaniem

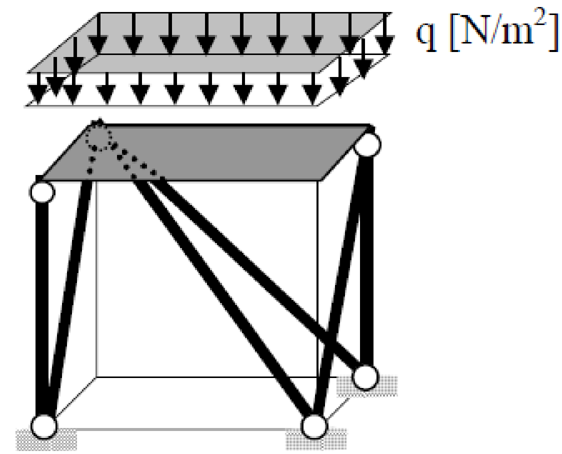




Wyznaczanie reakcji w ramach przestrzennych

- dźwigary załamane w planie
- rodzaje więzów i połączeń i ich reakcje
- układy tarczowo - prętowe





... koniec cytatu.

My zajmiemy się tylko prostym przykładem (ćwiczenia), ale podamy ogólne warunki równowagi bryły sztywnej:
Bryła sztywna pozostaje w równowadze, jeśli

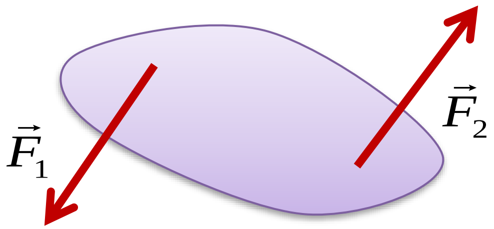
(1) Suma wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę wynosi zero:

$$\sum_i \vec{F}_i^{zew} = 0$$

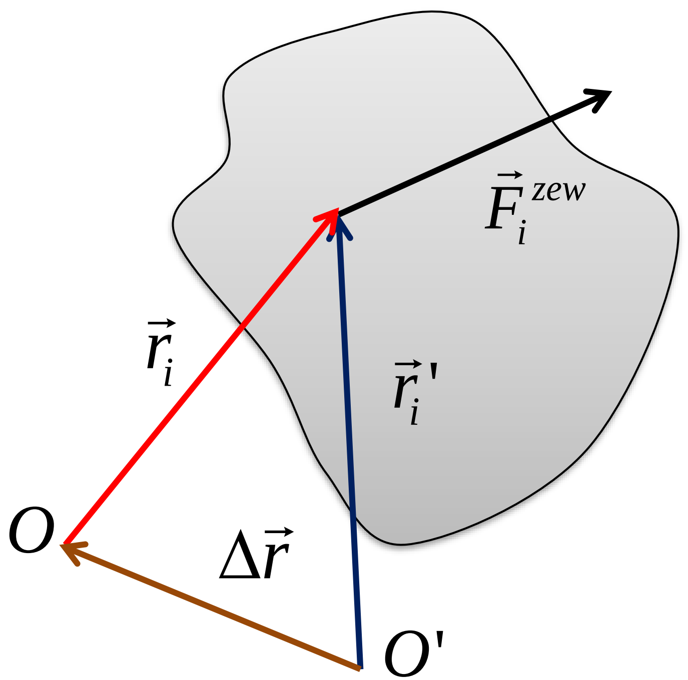
(2) Suma wszystkich momentów sił zewnętrznych działających na bryłę wynosi zero:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{zew} = 0$$

Warunek (1) nie wystarcza, bo bryła może się obracać , choć $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$!



Względem którego punktu liczyć całkowity moment sił zewnętrznych ?



$$\vec{M}_{II}^{zew} = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{zew} = \sum_i (\Delta\vec{r} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i^{zew}$$

$$= \sum_i \Delta\vec{r} \times \vec{F}_i^{zew} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{zew} =$$

$$= \Delta\vec{r} \times \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{zew}}_{0} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{zew} = \vec{M}_I^{zew}$$

Jeśli całkowita siła działająca na bryłę sztywną jest równa zero, to możemy liczyć całkowity moment sił zewnętrznych względem ***dowolnego*** punktu.

Najlepiej wybierać tak, by rachunki były najprostsze !

Energia kinetyczna bryły sztywnej:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} = \ldots = \quad \frac{1}{2} M \vec{V}^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i\,'}{dt}\right)^2$$

energia kinetyczna środka masy

energia kinetyczna ruchu względem środka masy

Energia potencjalna bryły sztywnej:
(Zakładamy, że wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne są zachowawcze.)

Jest to suma wszystkich energii potencjalnych sił zewnętrznych oraz wszystkich energii potencjalnych sił wewnętrznych. Energia potencjalna sił wewnętrznych może zależeć tylko od odległości wszystkich par cząstek. Skoro te odległości są w bryle sztywnej stałe, to energia potencjalna sił wewnętrznych jest stała i można ją pominąć w rozważaniach:

$$E_{pot} = E_{pot}^{zew}$$

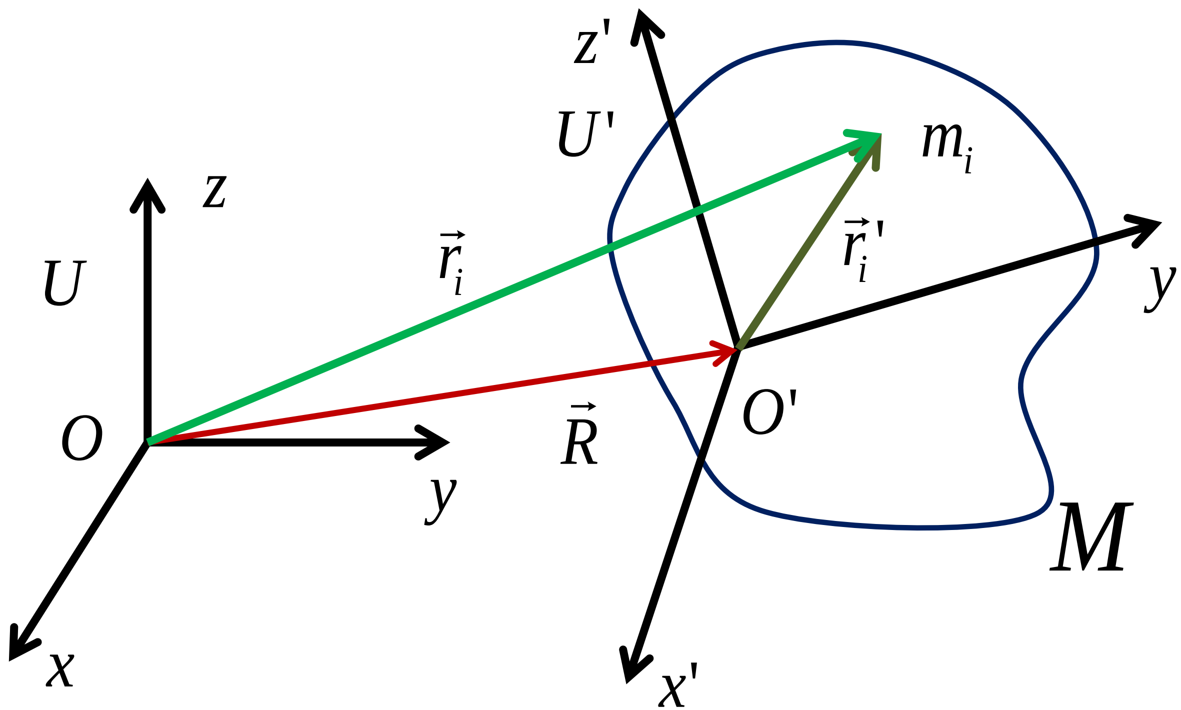
Przykład:
Energia potencjalna bryły sztywnej w jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym skierowanym przeciwnie do wektora osi Oz

$$\vec{g} = (0,0,-g), \; g > 0$$

$$E_{pot} = \int_{\Omega} g\, z\, dm = g \int_{\Omega} z\, dm = g\, M\, z_{cm} \quad , bo \;\; z_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} z\, dm$$

to iloczyn całkowitej masy bryły sztywnej, wartości przyspieszenia ziemskiego oraz składowej *z* wektora położenia środka masy bryły. Wygląda to tak, jak energia potencjalna punktu materialnego o masie *M*, który znajduje się na wysokości z_{cm} .

Aby policzyć energię kinetyczną bryły sztywnej wygodnie jest rozważyć dwa układy odniesienia: układ inercjalny *U* oraz układ *U’* sztywno związany z bryłą, którego początek znajduje się w pewnym punkcie *O’*. **Uwaga: nie zawsze jest najkorzystniej umieścić punkt *O’* w środku masy bryły, jak to zakładaliśmy na poprzednich slajdach !**



Na wykładzie nr 3 pokazaliśmy, jak transformuje się prędkość przy przejściu z inercjalnego układu *U* do dowolnego układu *U'*. Teraz wykorzystujemy ten wynik dla dowolnego punktu bryły sztywnej:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{v}_i = \cancel{\vec{v}_i\,'} + \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\,'$$

prędkość punktu bryły w układzie inercjalnym U

prędkość punktów bryły w układzie sztywno związanym z bryłą wynosi zero !

zmiana prędkości na skutek ruchu translacyjnego

zmiana prędkości na skutek ruchu obrotowego

Energia kinetyczna jest sumą (całką) po wszystkich punktach bryły sztywnej:

$$\vec{v}_{tr} \equiv \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad M \equiv \sum_i m_i \to \int_\Omega dm$$

$$E_{kin} = \sum_i \frac{m_i}{2}\vec{v}_i^{\,2} \to \frac{1}{2}\int_\Omega dm\,\vec{v}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega dm\left(\vec{v}_{tr} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega dm\left(\vec{v}_{tr}^{\,2} + \left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)^2 + 2\,\vec{v}_{tr}\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{v}_{tr}^{\,2}\int_\Omega dm \quad + \quad \left(\vec{v}_{tr}\times\vec{\omega}\right)\cdot\int_\Omega dm\,\vec{r}\,' \quad + \quad \frac{1}{2}\int_\Omega dm\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}M\,\vec{v}_{tr}^{\,2} \quad + \quad \left(\vec{v}_{tr}\times\vec{\omega}\right)\cdot\int_\Omega dm\,\vec{r}\,' \quad + \quad \frac{1}{2}\int_\Omega dm\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)^2$$

Podobny rachunek dla momentu pędu bryły sztywnej:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i{}'\right) \times \left(\vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i{}'\right) \rightarrow$$

$$\int_\Omega dm \left(\vec{R} + \vec{r}\,'\right) \times \left(\vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$= \int_\Omega dm\, \vec{R} \times \vec{v}_{tr} + \int_\Omega dm\, \vec{R} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) + \int_\Omega dm\ \vec{r}\,' \times \vec{v}_{tr} + \int_\Omega dm\, \vec{r}\,' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$= M\, \vec{R} \times \vec{v}_{tr} + \vec{R} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\int_\Omega dm\, \vec{r}\,' \right)\right) + \left(\int_\Omega dm\ \vec{r}\,' \right) \times \vec{v}_{tr} + \int_\Omega dm\, \vec{r}\,' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

W niektórych przypadkach można znaleźć punkt bryły nieruchomy w inercjalnym układzie odniesienia. Wtedy jedynym możliwym ruchem jest obrót wokół tego punktu. Zachodzi tak na przykład dla ruchu obrotowego bryły wokół stałej osi, dla ruchu wahadła zawieszonego w jednym punkcie, dla ruchu bąka wirującego po podłodze, gdy jego czubek utknie w zagłębieniu podłogi.

Wtedy warto przyjąć, że *O'=O* znajduje się właśnie w tym nieruchomym punkcie.

$$\vec{v}_{tr} = 0$$

$$\vec{R} = 0$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} dm\,(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')^2 \qquad\qquad \vec{L} = \int_{\Omega} dm\,\vec{r}\,'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

położenie punktu bryły
względem nieruchomego punktu O'

W wielu wypadkach wygodnie jest z kolei przyjąć, że $\vec{R} = \vec{r}_{cm}$

Zachodzi wtedy

$$\int_{\Omega} dm\, \vec{r}\,' = \int_{\Omega} dm\, (\vec{r} - \vec{r}_{cm}) = \int_{\Omega} dm\, \vec{r} - \int_{\Omega} dm\, \vec{r}_{cm} = M\, \vec{r}_{cm} - M\, \vec{r}_{cm} = 0$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M\, \vec{v}_{tr}^{\,2} \quad + \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm\, (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')^2$$

$$\vec{L} = M\, \vec{R} \times \vec{v}_{tr} \;+\; \int_{\Omega} dm\, \vec{r}\,' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

położenie punktu bryły
względem środka masy (CM)

Przykład:
Gdy jakiś przedmiot rzucamy w powietrze, żaden punkt bryły nie jest stały, ale ruch bryły można rozłożyć na ruch środka masy oraz ruch obrotowy względem środka masy.

Definicja tensora momentu bezwładności $\hat{I}$

$$\vec{r}' = (r_x', r_y', r_z') = (r_1', r_2', r_3')$$

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$\int_\Omega dm\, \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \int_\Omega dm\, \left(\vec{r}'^{\,2}\, \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{r}'\right) = \ldots = \widehat{I} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega dm\, (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \ldots = \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \widehat{I} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$\hat{I}$ jest macierzą 3 x 3 o elementach macierzowych

$$\widehat{I}_{ij} = \int_\Omega dm\, \left(\vec{r}'^{\,2} \delta_{ij} - r_i'\, r_j'\right) = \widehat{I}_{ji}$$

Szczegółowe przeliczenie

$$\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\vec{\omega}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{r}\,'\right)_i=\vec{r}\,'^{\,2}\,\omega_i-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,'\right)r_i\,'$$

$$=\vec{r}\,'^{\,2}\,\omega_i-\sum_{j=1}^{3}\left(\omega_j\,r_j\,'\right)r_i\,'=\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\omega_i\,\delta_{ij}-\left(\omega_j\,r_j\,'\right)r_i\,'\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\omega_j\,\delta_{ij}-\omega_j\,r_j\,'\,r_i\,'\right)=\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\delta_{ij}-r_j\,'\,r_i\,'\right)\omega_j$$

$$\rightarrow\left(\int_{\Omega}dm\,\vec{r}\,'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)\right)_i=\int_{\Omega}dm\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\delta_{ij}-r_j\,'\,r_i\,'\right)\right)\omega_j$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\int_{\Omega}dm\left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\delta_{ij}-r_j\,'\,r_i\,'\right)}_{\widehat{I}_{ij}}\omega_j\equiv\sum_{j=1}^{3}\widehat{I}_{ij}\,\omega_j$$

Wnioski:

(1) Wektor prędkości kątowej nie musi być równoległy do wektora momentu pędu (w części dotyczącej czystego ruchu obrotowego)

(2) Ponieważ tensor momentu bezwładności jest symetryczny, można zawsze tak dobrać orientację układu *U'* związanego sztywno z bryłą sztywną, by macierz tensora bezwładności była diagonalna. Nazywamy to sprowadzeniem na kierunki główne.

$$\widehat{I}_{ij} = \delta_{ij} \int_{\Omega} dm \left(\vec{r}\,'^{\,2} - r_i'^{\,2} \right)$$

$$\widehat{I}_{11} = \int_{\Omega} dm \left(r_2'^{\,2} + r_3'^{\,2} \right)$$

$$\widehat{I}_{22} = \int_{\Omega} dm \left(r_1'^{\,2} + r_3'^{\,2} \right)$$

$$\widehat{I}_{33} = \int_{\Omega} dm \left(r_1'^{\,2} + r_2'^{\,2} \right)$$

W dalszym ciągu będziemy zajmować się jedynie tzw. **ruchem płaskim bryły sztywnej**. W tym ruchu każdy punkt bryły sztywnej porusza się stale w płaszczyźnie równoległej do pewnej ustalonej płaszczyzny w układzie odniesienia *U* zwanej płaszczyzną kierującą. Chwilowa oś obrotu jest stale prostopadła do płaszczyzny kierującej, podobnie jak wektor prędkości kątowej.

Przykładem ruchu płaskiego jest ruch bryły sztywnej wokół stałej osi. Zakładamy, że oś łączy dwa unieruchomione punkty bryły. Te dwa punkty P_1 i P_2 są potrzebne, by prawidłowo uwzględnić siły reakcji więzów ! Inaczej mówiąc: najogólniejszy sposób działania sił reakcji wymaga tego, by mogły działać w dwóch punktach na osi obrotu.

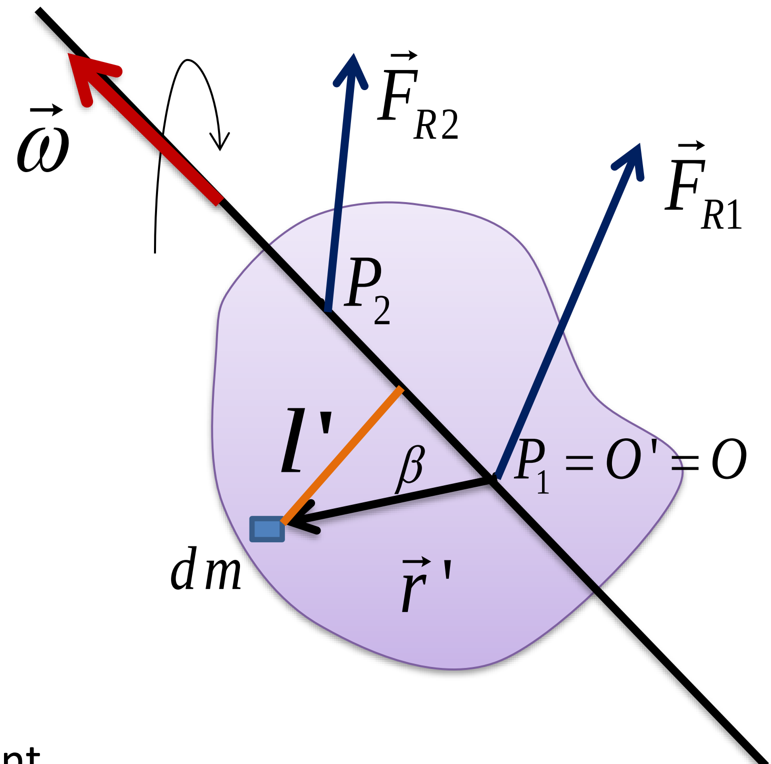
$$\vec{L} = \int_{\Omega} dm\, \vec{r}\,' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,zew}_{reakcji} + \vec{F}^{\,zew}_{inne}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\,zew}_{reakcji} + \vec{M}^{\,zew}_{inne}$$

moment sił reakcji więzów względem punktu P_2

moment innych sił względem punktu P_2



Liczymy składową równoległą do prędkości kątowej obu stron ostatniego równania, mnożąc je obustronnie przez stały wektor jednostkowy równoległy do prędkości kątowej.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{zew}_{reakcji} + \vec{M}^{zew}_{inne}$$

Moment siły reakcji w P1 jest równy zero, a w punkcie P2 jest prostopadły do osi obrotu !

$$\rightarrow \frac{d\left(\hat{\omega}\cdot\vec{L}\right)}{dt} = \cancel{\hat{\omega}\cdot\vec{M}^{zew}_{reakcji}} + \hat{\omega}\cdot\vec{M}^{zew}_{inne} = \hat{\omega}\cdot\vec{M}^{zew}_{inne} \equiv M_{\omega}$$

moment sił (innych niż sił reakcji więzów) względem ustalonej osi obrotu

$$\vec{L} = \int_{\Omega} dm\, \vec{r}\,' \times \left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{L}\cdot\hat{\omega} = \int_{\Omega} dm \left(\vec{r}\,'^{\,2}\,\vec{\omega}\cdot\hat{\omega} - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,'\right)\left(\vec{r}\,'\cdot\hat{\omega}\right)\right)$$

$$= \ldots = \omega\int_{\Omega} dm\, \vec{r}\,'^{\,2}\sin^2\beta = \omega\int_{\Omega} dm\, l'^{\,2} \equiv I\,\omega$$

β jest kątem między $\hat{\omega}$ a $\vec{r}\,'$.
l' jest odległością elementu masy *dm* od osi obrotu.

I jest momentem bezwładności względem ustalonej osi.

Możemy więc zestawić wielkości i prawa ruchu dla ruchu postępowego w jednym wymiarze i ruchu obrotowego względem ustalonej osi

$$x \leftrightarrow \alpha$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \varepsilon$$

$$m \leftrightarrow I$$

$$p \leftrightarrow L$$

$$F \leftrightarrow M_{\omega}$$

składowa momentu siły wypadkowej
wzdłuż osi obrotu; to nie jest masa całkowita !

$$F = m\,\frac{d^2 x}{dt^2} = m\,\frac{dv}{dt} = m\,a$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$p = m v$$

$$\updownarrow$$

$$M_{\omega} = I\,\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I\,\omega^2$$

$$L = I\,\omega$$

Szczególnie ważny przypadek ruchu wokół ustalonej osi stanowi **wahadło fizyczne, czyli** bryła sztywna zawieszona na stałej osi poziomej w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Wiemy już, że składowa momentu sił reakcji równoległa do osi obrotu wynosi zero. Pozostaje policzenie składowej momentu siły ciężkości równoległej do osi obrotu (składowa *y* w danym przypadku).
O=O' leży na osi obrotu.

$$M_y = I_y \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

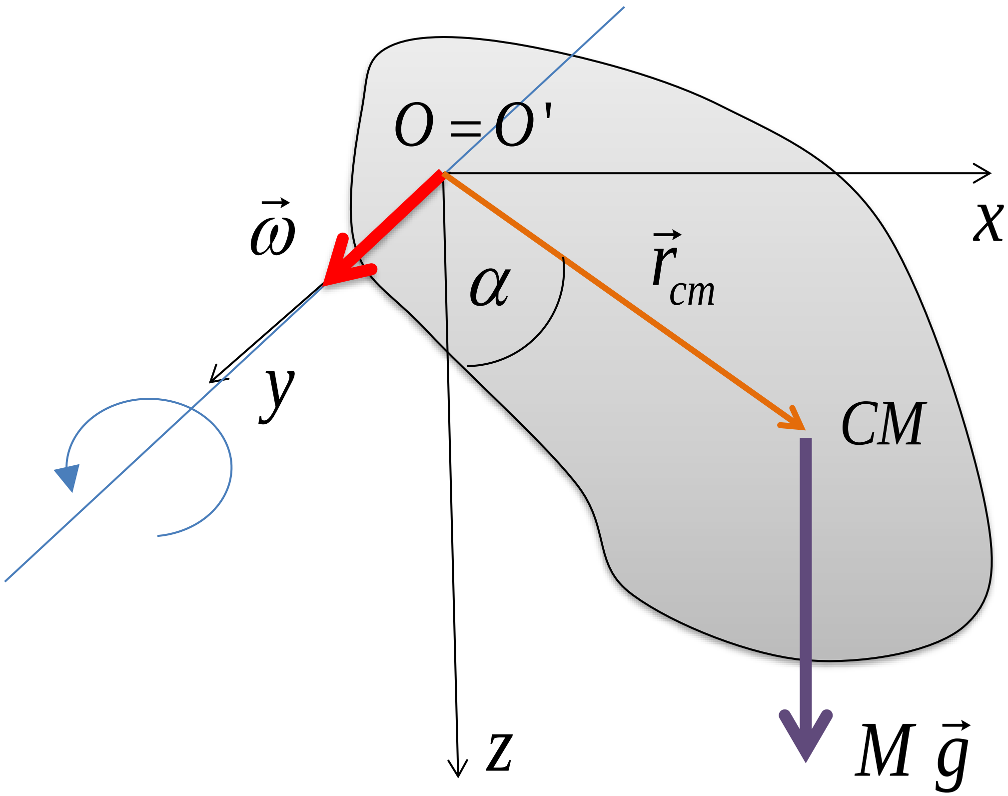
$$M_y = \int_\Omega \left(\vec{r} \times dm\,\vec{g}\right)_y$$

$$= \int_\Omega \left(dm\,\vec{r} \times \vec{g}\right)_y$$

$$= \left(\vec{r}_{cm} \times M\,\vec{g}\right)_y$$

$$= -M\,g\,x_{cm}$$

$$= -M\,g\,l\sin\alpha$$



Dlatego dostajemy (l jest odległością środka masy od osi obrotu):

$$I_y \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -M g\, l \sin\alpha$$

$$\rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M g\, l}{I_y} \sin\alpha$$

Dla małych wychyleń mamy równanie oscylatora harmonicznego prostego na kąt α:

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{M g\, l}{I_y} \alpha$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_y}{M g\, l}}$$

wzór na okres małych drgań wahadła fizycznego

Pytanie:

Jaka musi być długość wahadła matematycznego (l_0), by jego okres małych drgań był taki sam ?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_y}{M\,g\,l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad \rightarrow \quad l_0 = \frac{I_y}{M\,l}$$

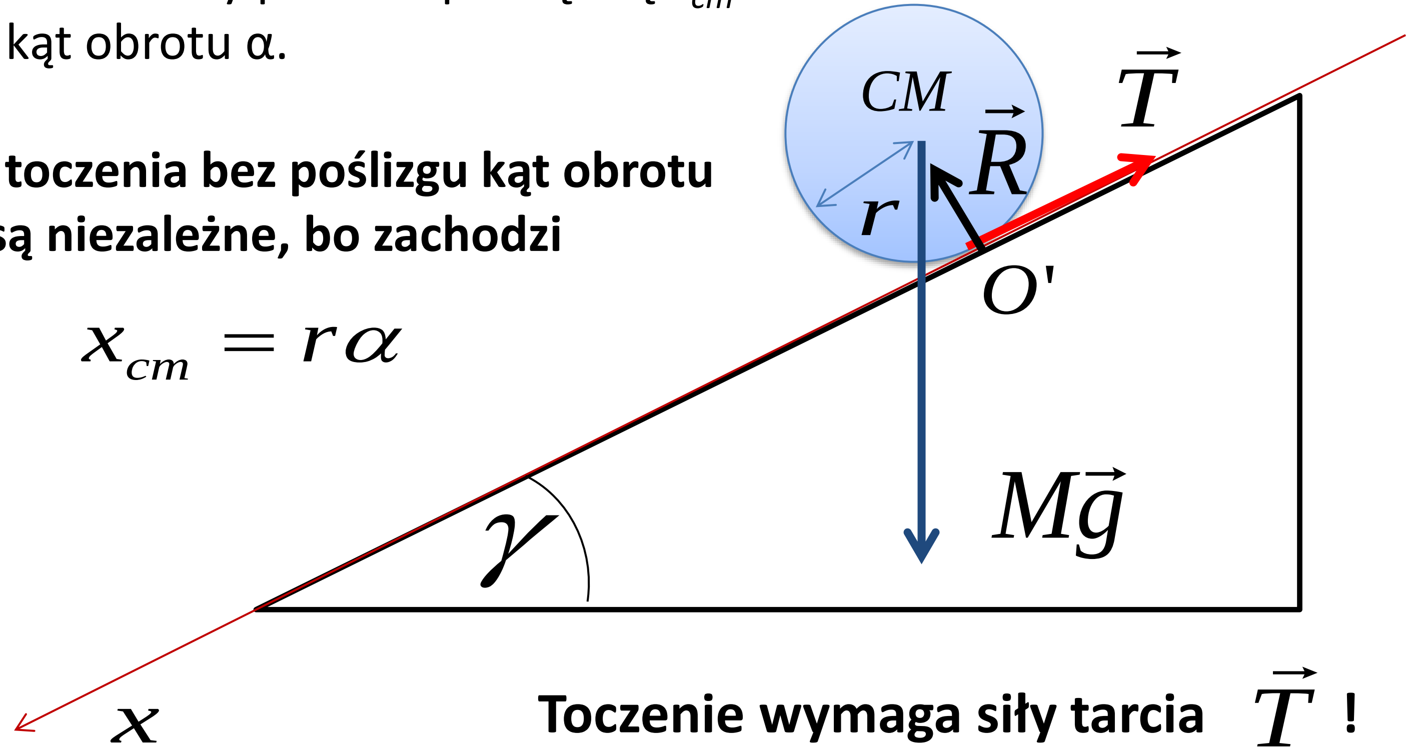
tzw. długość zredukowana wahadła fizycznego

Innym przykładem ruchu płaskiego jest toczenie się koła (lub walca, kuli, sfery, obręczy, …) po równi pochyłej.

Zakładamy, że koło o promieniu *r* leży stale w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez daną prostą, po której się porusza. Prostą tą wybieramy jako oś *x*.
Położenie koła określamy przez współrzędną x_{cm} środka masy i kąt obrotu α.

W przypadku toczenia bez poślizgu kąt obrotu oraz x_{cm} nie są niezależne, bo zachodzi

$$x_{cm} = r\alpha$$



Toczenie wymaga siły tarcia $\vec{T}$ **!**

Jakie równania opisują ruch koła ?
Na koło działają trzy siły: siła przyciągania ziemskiego, siła reakcji równi oraz siła tarcia.

Uwaga: ta ostatnia siła nie powoduje strat energii, bo punkt styczności O’ w każdej chwili spoczywa względem równi !

Dla ruchu postępowego środka masy dostajemy:

$$M\frac{d^2x_{cm}}{dt^2}=\sum_i F_{ix}^{zew}=\left(M\vec{g}\right)_x+\left(\vec{R}\right)_x+\left(\vec{T}\right)_x=Mg\sin\gamma-T$$

Aby wypisać równanie dla ruchu obrotowego, wróćmy raz jeszcze do wzoru na całkowity moment pędu bryły sztywnej:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moment pędu środka masy bryły sztywnej}}}{\vec{r}_{cm} \times \vec{P}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moment pędu bryły liczony względem środka masy}}}{\sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}} \equiv \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r}_{cm} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{zew}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{zew} = \sum_i \left(\vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}\right) \times \vec{F}_i^{zew}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{zew} + \vec{r}_{cm} \times \sum_i \vec{F}_i^{zew} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{zew} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{zew}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{zew}$$

Szybkość zmian momentu pędu bryły liczonego względem środka masy jest równa całkowitemu momentowi sił zewnętrznych liczonemu względem środka masy, chociaż układ związany ze środkiem masy nie musi być inercjalny !

W przypadku staczania się koła po równi wystarczy rozważyć składową z równania

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{\,zew}$$

prostopadłą do płaszczyzny rysunku, równoległą do wektora chwilowej prędkości kątowej.

Dostajemy:

$$\left(\vec{L}_2\right)_z = I_{cm}\,\omega \rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_2}{dt}\right)_z = I_{cm}\frac{d\omega}{dt} = I_{cm}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\left(\sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{\,zew}\right)_z = rT$$

Mamy wreszcie komplet równań:

$$M \frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} = M g \sin\gamma - T$$

$$I_{cm} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = rT$$

$$x_{cm} = r\alpha$$

Łatwo dostajemy wyrażenia na przyspieszenia ruchu postępowego i obrotowego bryły oraz wartość siły tarcia.

$$\frac{d^2 x_{cm}}{dt^2} = \frac{M g r^2 \sin\gamma}{I_{cm} + M r^2}$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{M g r \sin\gamma}{I_{cm} + M r^2}$$

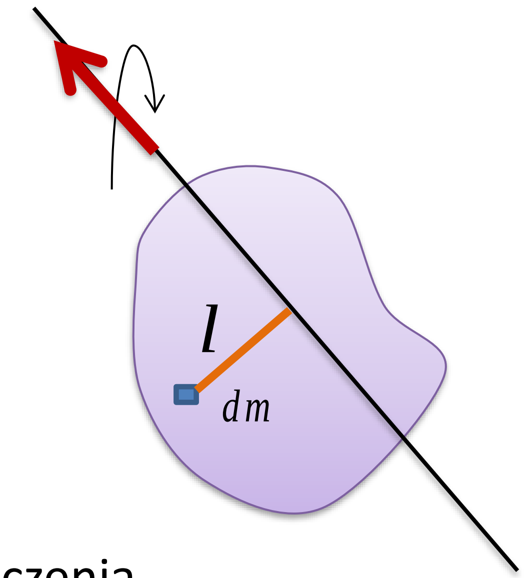
$$T = \frac{M g I_{cm} \sin\gamma}{I_{cm} + M r^2} \neq f M g \cos\gamma \,!$$

Aby dostać rozwiązanie dla konkretnej bryły sztywnej, trzeba znać wzory na I_{cm}.

Zajmiemy się teraz podstawowymi własnościami momentu bezwładności I .

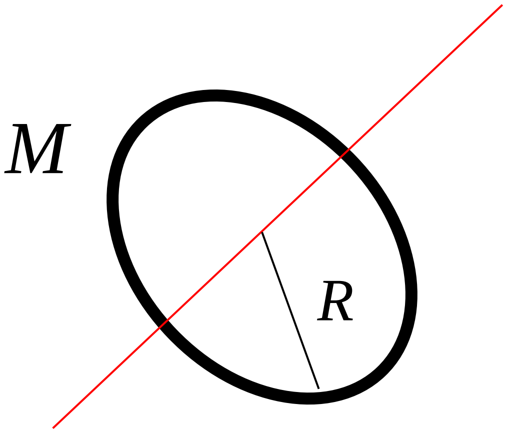
$$I = \int_{\Omega} dm\, l^2$$

odległość
od osi obrotu



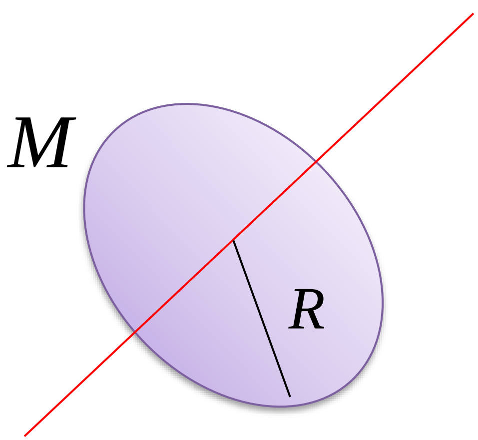
Rozmiary w kierunku równoległym do osi nie mają znaczenia.
Moment bezwładności walca i cienkiego dysku względem osi prostopadłej do podstawy walca (powierzchni dysku) jest taki sam, jeśli tylko całkowite masy i promienie są takie same. Moment bezwładności jest wielkością addytywną: aby dostać moment bezwładności całego układu, trzeba zsumować momenty bezwładności części składowych.

Najprostsza sytuacja zachodzi, gdy wszystkie elementy bryły sztywnej są w takiej samej odległości od osi obrotu: cienka obręcz (lub tylko jej fragment !)



$$I = \int_{\Omega} dm\, l^2 = R^2 \int_{\Omega} dm = M\, R^2$$

Z cienkich obręczy można „posklejać" całe koło (dysk) → całkowanie !



$$I = \frac{1}{2} M\, R^2$$

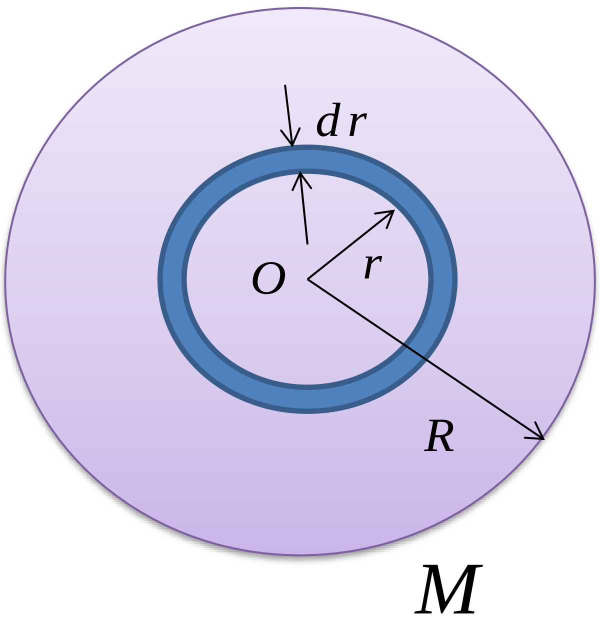
$$I = \int_{\Omega} dI = \int_0^R dm\, r^2$$

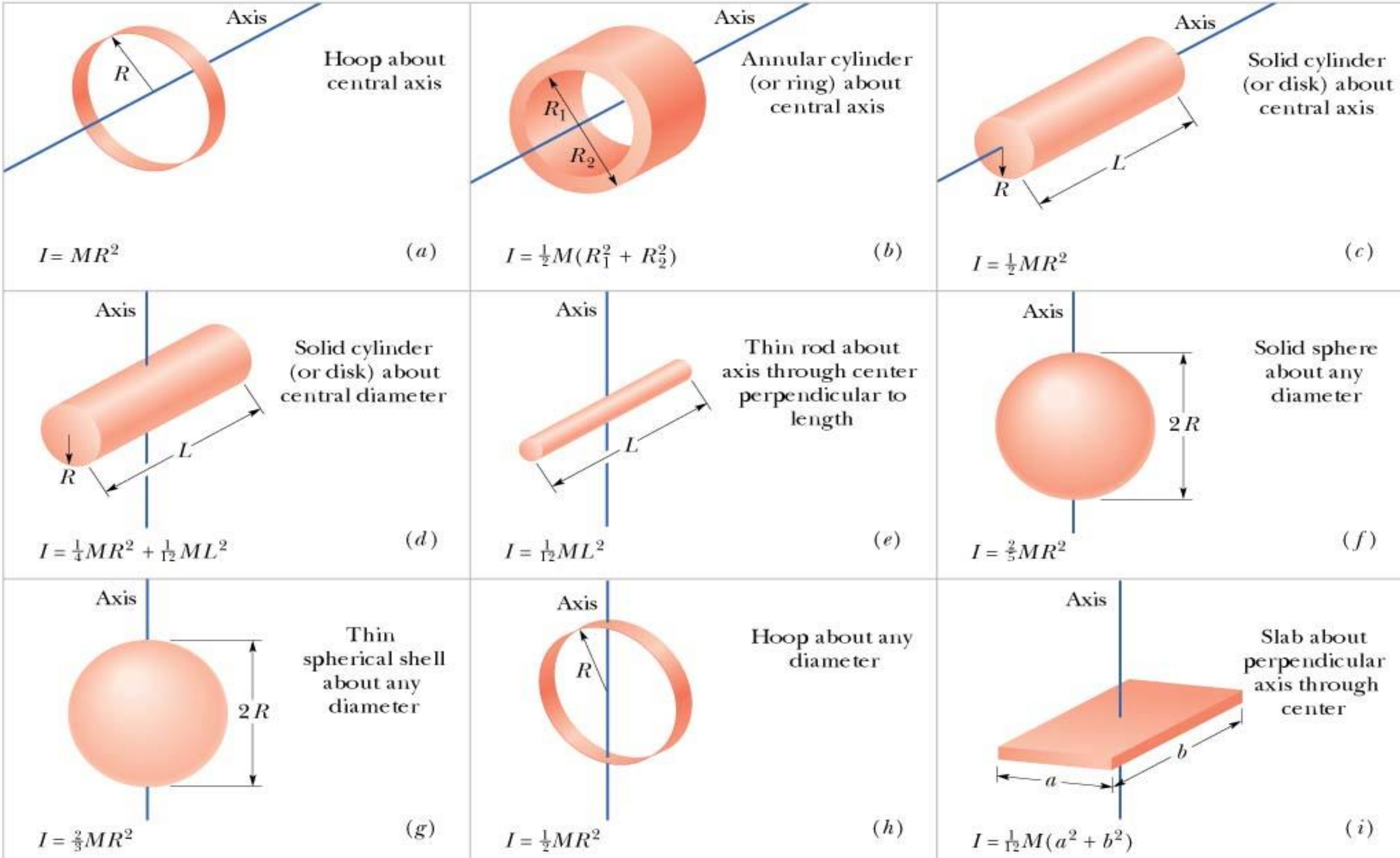
$$= \int_0^R \sigma\, dS\, r^2 = \int_0^R \sigma \underbrace{2\pi r dr}_{dS} r^2$$

$$= 2\pi\sigma \int_0^R dr\, r^3 = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sigma \pi R^2}_{M} R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

cienki dysk
o stałej gęstości
powierzchniowej σ



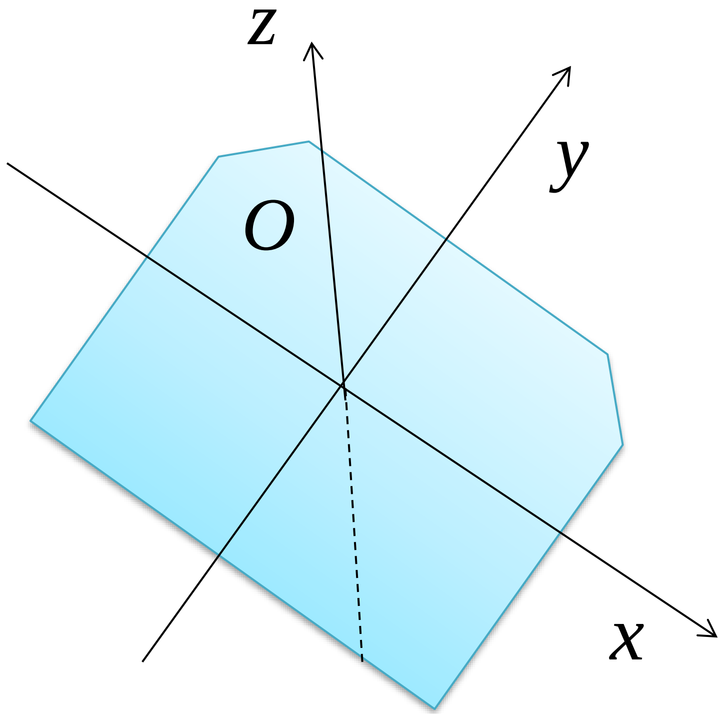


Axis
Hoop about central axis
R
$I = MR^2$
(a)
Axis
Annular cylinder (or ring) about central axis
R_1
R_2
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(b)
Axis
Solid cylinder (or disk) about central axis
L
R
$I = \frac{1}{2}MR^2$
(c)
Axis
Solid cylinder (or disk) about central diameter
L
R
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
(d)
Axis
Thin rod about axis through center perpendicular to length
L
$I = \frac{1}{12}ML^2$
(e)
Axis
Solid sphere about any diameter
$2R$
$I = \frac{2}{5}MR^2$
(f)
Axis
Thin spherical shell about any diameter
$2R$
$I = \frac{2}{3}MR^2$
(g)
Axis
Hoop about any diameter
R
$I = \frac{1}{2}MR^2$
(h)
Axis
Slab about perpendicular axis through center
a
b
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
(i)

Na koniec jeszcze dwa bardzo użyteczne twierdzenia o momentach bezwładności:

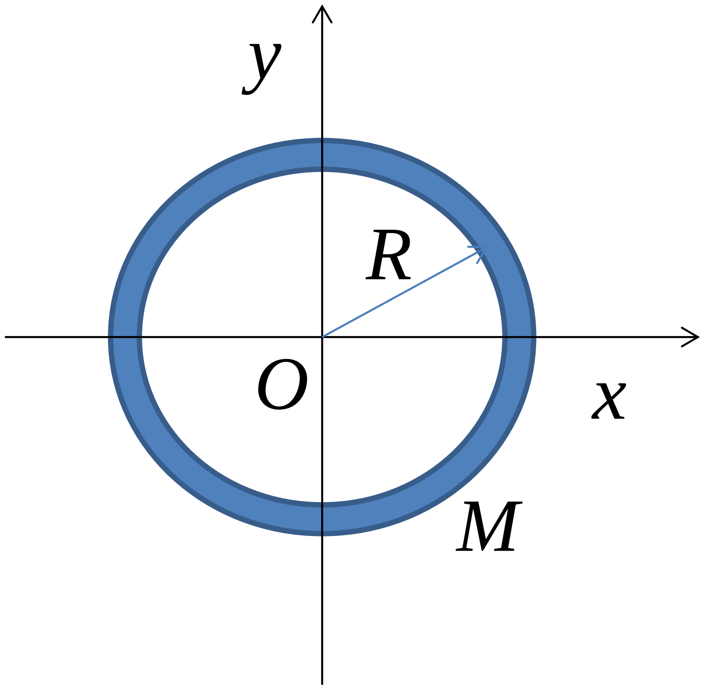
(1) Twierdzenie o momentach bezwładności figury płaskiej względem trzech osi wzajemnie prostopadłych i przecinających się w jednym punkcie.

Załóżmy, że figura płaska zawiera się w płaszczyźnie xy, czyli oś z jest prostopadła do płaszczyzny płyty. Wówczas zachodzi:



$$I_z = I_x + I_y$$

Przykład zastosowania:

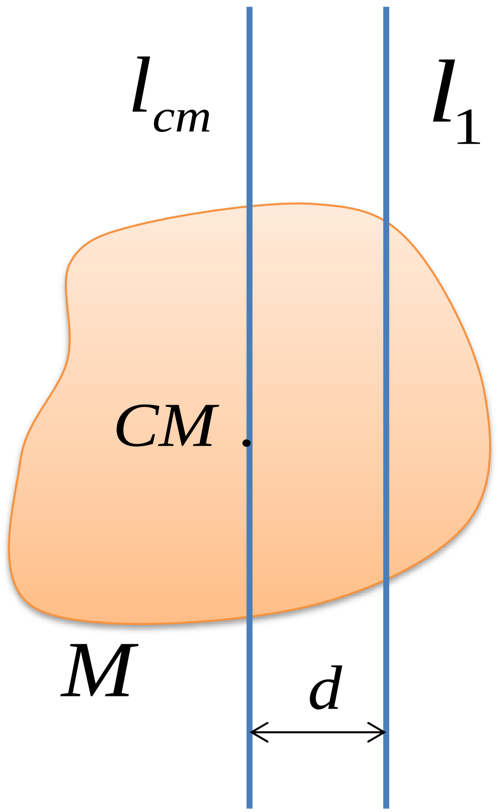


$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_z = M R^2$$

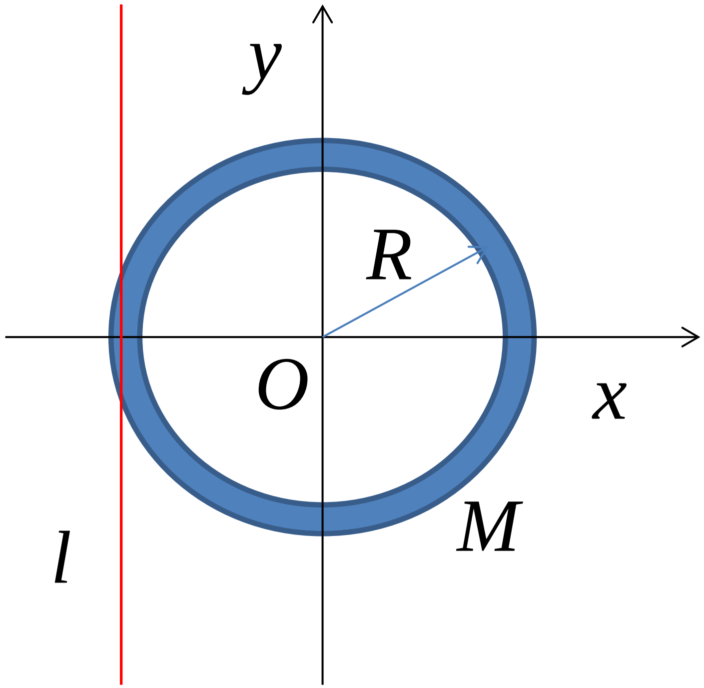
$$I_x = I_y$$

$$\rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2} M R^2$$



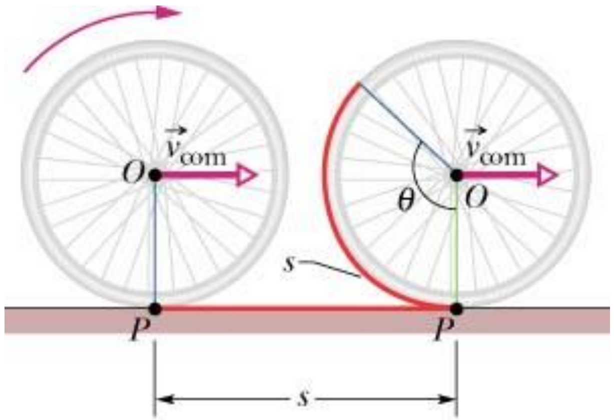
$$I(l_1) = I(l_{cm}) + M d^2$$

Bardzo ważne:
osie muszą być równoległe,
a l_{cm} musi przechodzić przez
środek masy bryły !

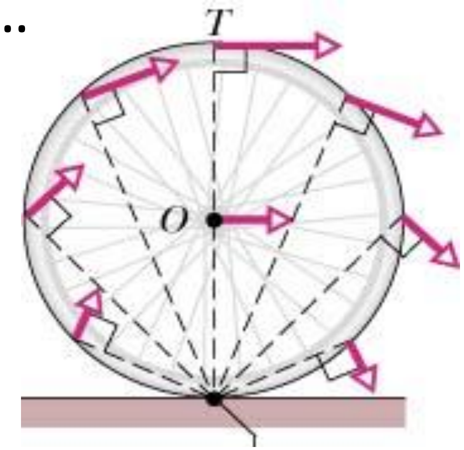


$$I_l = I_y + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Jeszcze o toczeniu się ...

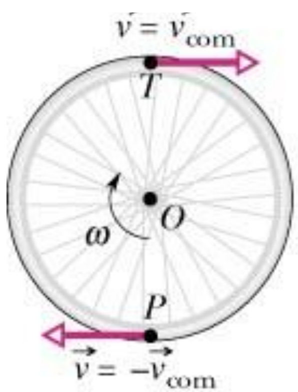


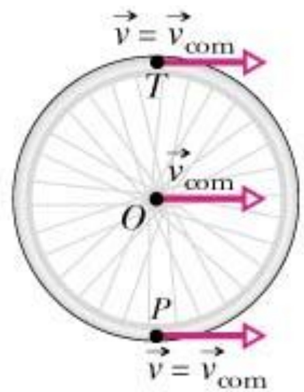
$s = \Theta R$

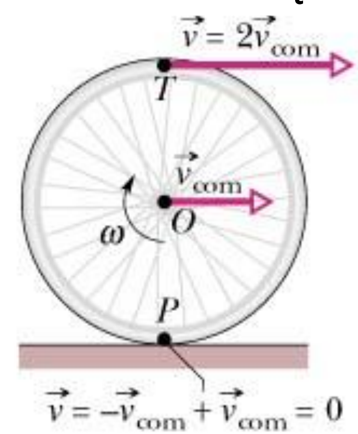


chwilowa oś obrotu P

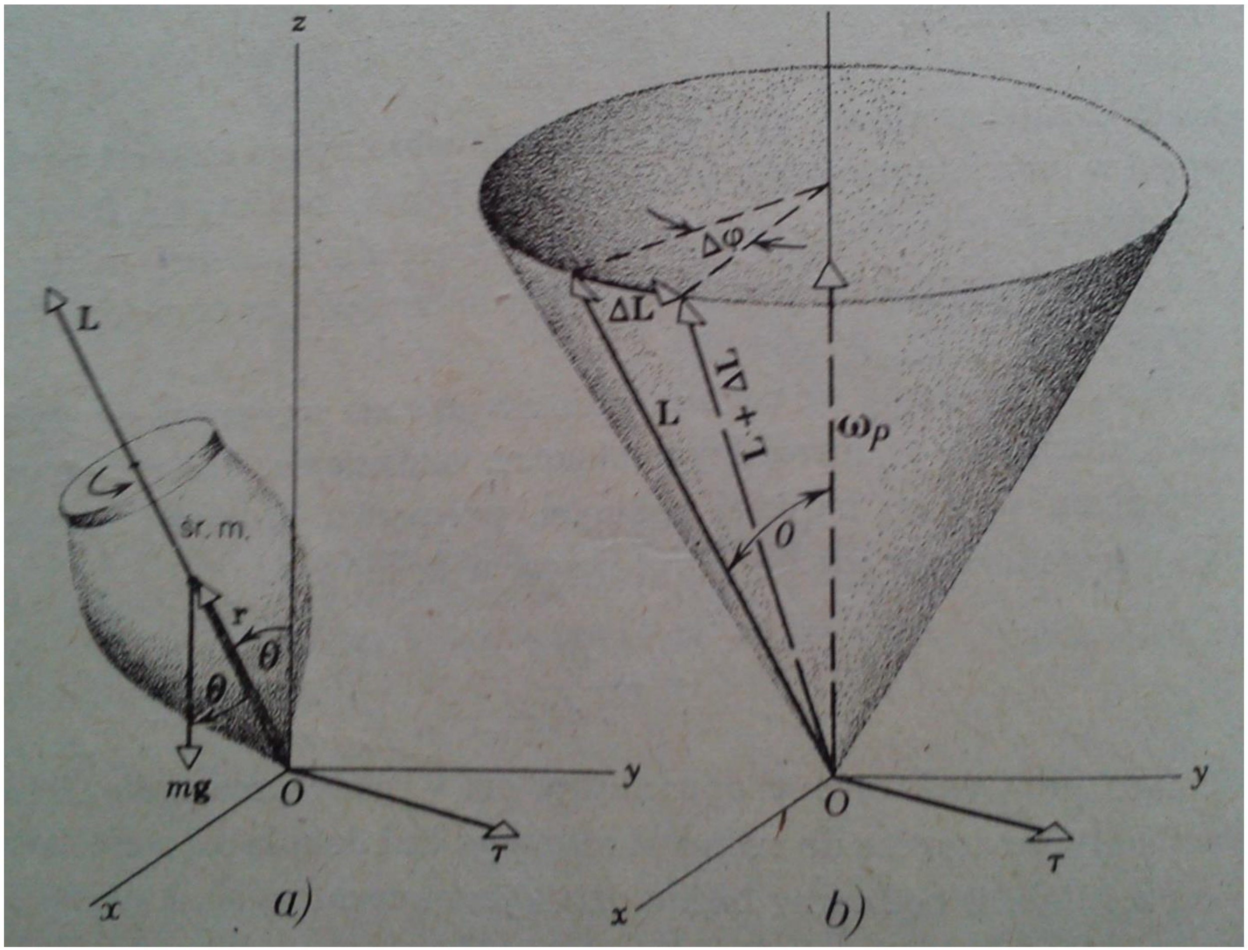
(a) obrót + przesunięcie = toczenie się







Rozważmy jeszcze przykład ruchu bryły sztywnej, który **nie jest ruchem płaskim**
Bąk wiruje wokół własnej osi w taki sposób, że jego punkt podparcia znajduje się w początku układu *O* inercjalnego układu odniesienia.



Wiemy z doświadczenia, że oś takiego wirującego bąka porusza się dookoła pionowej osi i zakreśla powierzchnię stożka. Taki ruch nazywamy **precesją**. Policzymy prędkość kątową ruchu precesyjnego

Rysunek z książki D. Halliday, R. Resnick, Fizyka 1, PWN, Warszawa 1983

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} dm\,(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')^2 \qquad \vec{L} = \int_{\Omega} dm\,\vec{r}\,'\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

położenie punktu bryły
względem nieruchomego punktu O

Na bąk działają dwie siły: w górę siła reakcji w punkcie podparcia *O* oraz w dół siła ciężkości przyłożona do środka masy. Bąk ma prędkość kątową $\vec{\omega}$ skierowaną wzdłuż swojej osi oraz moment pędu $\vec{L}$ o tym samym kierunku, który tworzy kąt θ z pionową osią.

Stosujemy ogólne prawo: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \cancel{\vec{M}^{zew}_{reakcji}} + \vec{M}^{zew}_{graw} = \vec{M}^{zew}_{graw}$$

Moment siły reakcji względem punktu O wynosi zero, bo ramię jest równe zero !

$$\vec{M}^{zew}_{graw} = \vec{r} \times m\,\vec{g}$$

położenie środka masy względem punktu O

Wektor momentu pędu jest prostopadły do momentu siły zewnętrznej !
Pochodna wektora momentu pędu jest prostopadła do wektora momentu pędu, więc długość wektora momentu pędu pozostaje stała w czasie !

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{M\,\Delta t}{L\sin\theta} = \frac{\Delta t\; r\, m\; g\sin(180^o - \theta)}{L\sin\theta}$$

Dlatego:

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{r\,m\;g}{L}$$

Prędkość kątowa precesji nie zależy od kąta θ
i jest odwrotnie proporcjonalna do wartości momentu pędu *L*.

Im szybciej wiruje bąk, tym wolniejsza jest precesja jego osi obrotu !

Polecam materiały pomocnicze dotyczące różnych przypadków zderzenia punktu materialnego z jednorodnym prętem:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod1.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod2v1.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod3.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod4.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod1.nb

Jednorodny pręt o masie M i długości L może się swobodnie obracać wokół sztywno umocowanej pionowej osi, przechodzącej przez środek pręta. Pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością v trafia prostopadle w koniec nieruchomego pręta i pozostaje w nim. Liczymy prędkość kątową ω pręta z doczepioną masą po zderzeniu. W tym procesie nie jest zachowana ani energia kinetyczna (tracona w procesie "doklejania" masy punktowej do pręta), ani pęd (działa siła przytrzymująca oś obrotu). Zachowany jest natomiast moment pędu układu liczony względem środka pręta, bo ramię siły trzymającej środek pręta jest równe zero !

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod2v1.nb

Jednorodny pręt o masie M i długości L leży na gładkiej powierzchni poziomej. Pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością v trafia prostopadle w koniec nieruchomego pręta i pozostaje w nim. Liczymy prędkość kątową ω pręta po zderzeniu.

Korzystamy z zasady zachowania pędu (w płaszczyźnie poziomej) oraz zachowania składowej momentu pędu prostopadłej do powierzchni z prętem. Moment pędu LO jest liczony względem początku nieruchomego układu współrzędnych.

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod3.nb

Jednorodny pręt o masie M i długości L leży na gładkiej powierzchni poziomej. Pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością v trafia prostopadle w koniec nieruchomego pręta i rozprasza się elastycznie pod kątem θ. Liczymy długość wektora prędkości punktowej masy po zderzeniu (v1), kąt, pod którym wyleci środek pręta, długość wektora prędkości środka masy pręta oraz prędkość kątową ω pręta po zderzeniu.

Na początku dany jest przez pęd cząstki o masie m i parametr zderzenia L/2. Korzystamy z zasad zachowania energii kinetycznej, pędu (w płaszczyźnie poziomej) oraz zachowania składowej momentu pędu prostopadłej do powierzchni z prętem. Moment pędu LO jest liczony względem początku nieruchomego układu współrzędnych.

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rod4.nb

Jednorodny pręt o masie M i długości L leży na gładkiej powierzchni poziomej i może obracać się swobodnie wokół pionowej osi, która przechodzi przez jego środek. Pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością v trafia prostopadle w koniec nieruchomego pręta i rozprasza się elastycznie pod kątem θ. Liczymy długość wektora prędkości punktowej masy po zderzeniu (v1) oraz prędkość kątową ω pręta po zderzeniu.

Korzystamy z zasad zachowania energii kinetycznej oraz zachowania składowej momentu pędu prostopadłej do powierzchni z prętem. Moment pędu LO jest liczony względem środka pręta.