

# Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak  
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 8

Na kolejnych wykładach zajmiemy się wybranymi zagadnieniami dotyczącymi elektryczności i magnetyzmu.

Polecam zainteresowanym znakomity podręcznik Davida J. Griffithsa, *Podstawy elektrodynamiki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001



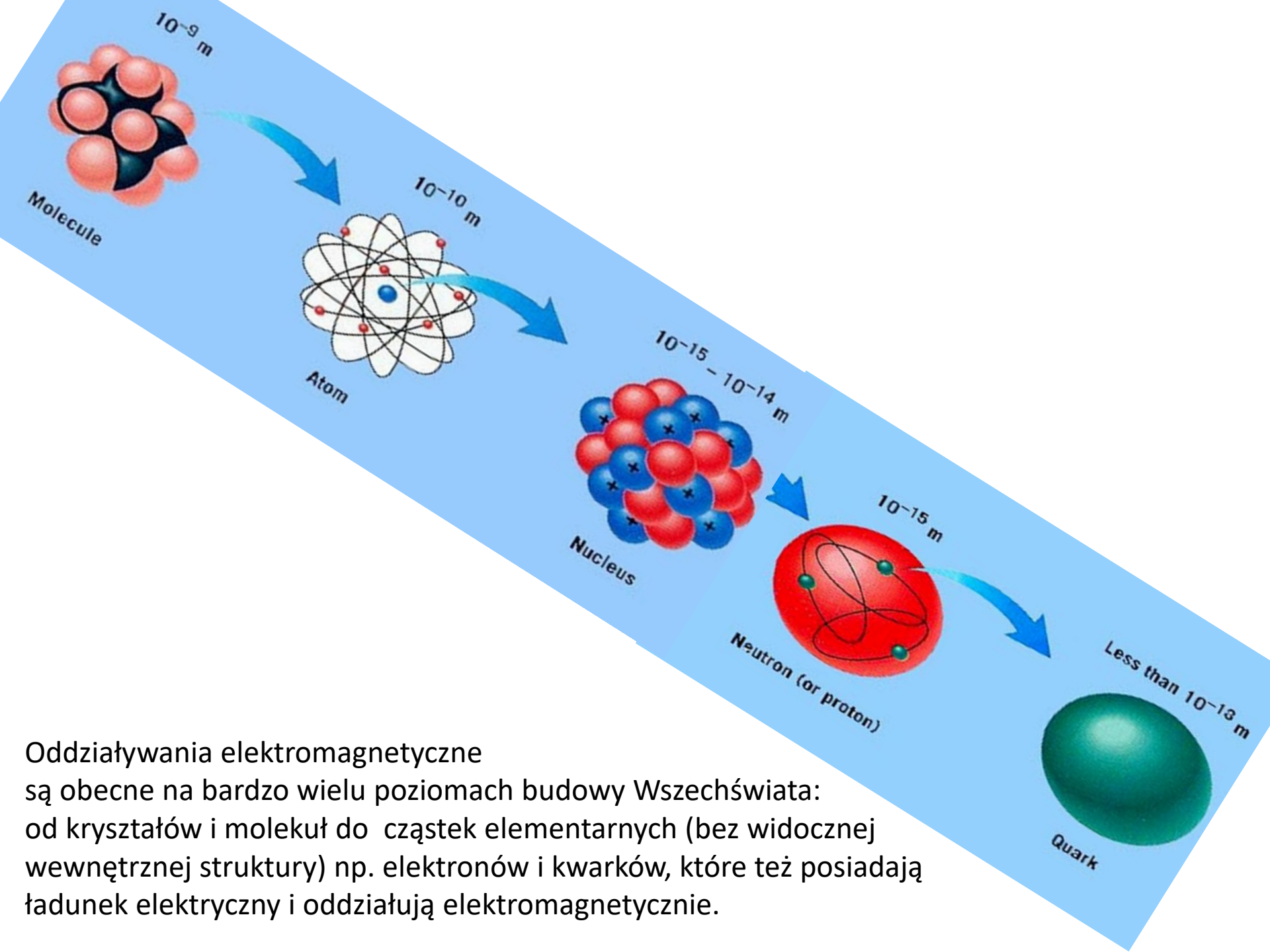
Polecam także wykłady profesora Reinharda Kulesy, skąd zaczerpnąłem wiele obrazków.

# Znaczenie elektromagnetyzmu

Oddziaływania elektromagnetyczne są jednym z oddziaływań fundamentalnych.

Są odpowiedzialne za:

- niektóre własności cząstek elementarnych
- ograniczoną liczbę pierwiastków chemicznych
- wiązanie elektronów i jąder atomowych w atomy,
- wiązanie atomów w molekuły,
- tworzenie uporządkowanych struktur (kryształy)
- ...
- chemię
- biologię



Oddziaływania elektromagnetyczne są obecne na bardzo wielu poziomach budowy Wszechświata: od kryształów i molekuł do cząstek elementarnych (bez widocznej wewnętrznej struktury) np. elektronów i kwarków, które też posiadają ładunek elektryczny i oddziałują elektromagnetycznie.

Poznajemy świat dzięki oddziaływaniom elektromagnetycznym !  
Mózg wykazuje aktywność elektryczną !

## Przebieg nowoczesnego badania EEG

### Seminarium

Polskiego Towarzystwa

Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej

**„Elektryczna aktywność mózgu”**

Ryszard Tadeusiewicz



# Aktywność elektryczna serca - elektrokardiografia

Polecam tekst z Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego przygotowujący do ćwiczenia laboratoryjnego z EKG:

<http://www.uwm.edu.pl/kfib/dydaktyka/instrukcje%20medycyna/19-07-2011%20ekg.pdf>

## Zagadnienia:

- Podstawy elektrodynamiki. (Pole elektryczne, pole magnetyczne, oddziaływanie w pól z ładunkami, dipole)
- Podstawowe prawa przepływu prądu elektrycznego. (Definicje: ładunek elektryczny, potencjał elektryczny, napięcie elektryczne, natężenie prądu, opór elektryczny; prawo Ohma, prawa Kirchhoffa).
- Czynności elektryczne błon biologicznych:
  - mechanizm powstawania potencjału spoczynkowego (mechanizmy utrzymujące rozmieszczenie jonów wzdłuż błony komórkowej),
  - mechanizm powstawania i przewodzenia potencjału czynnościowego na przykładzie komórek nerwowych i komórek serca (układ bodźcotwórczo-przewodzący, mechanizmy biofizyczne powstawania i przewodzenia pobudzenia w sercu).
- Wektor elektryczny serca.
- Elektrokardiografia: metody rejestracji, elektrokardiogram.



obrazek ze strony  
<https://mefics.org/pl/uk%C5%82ad-przewodzenia-elektrycznego-serca/>

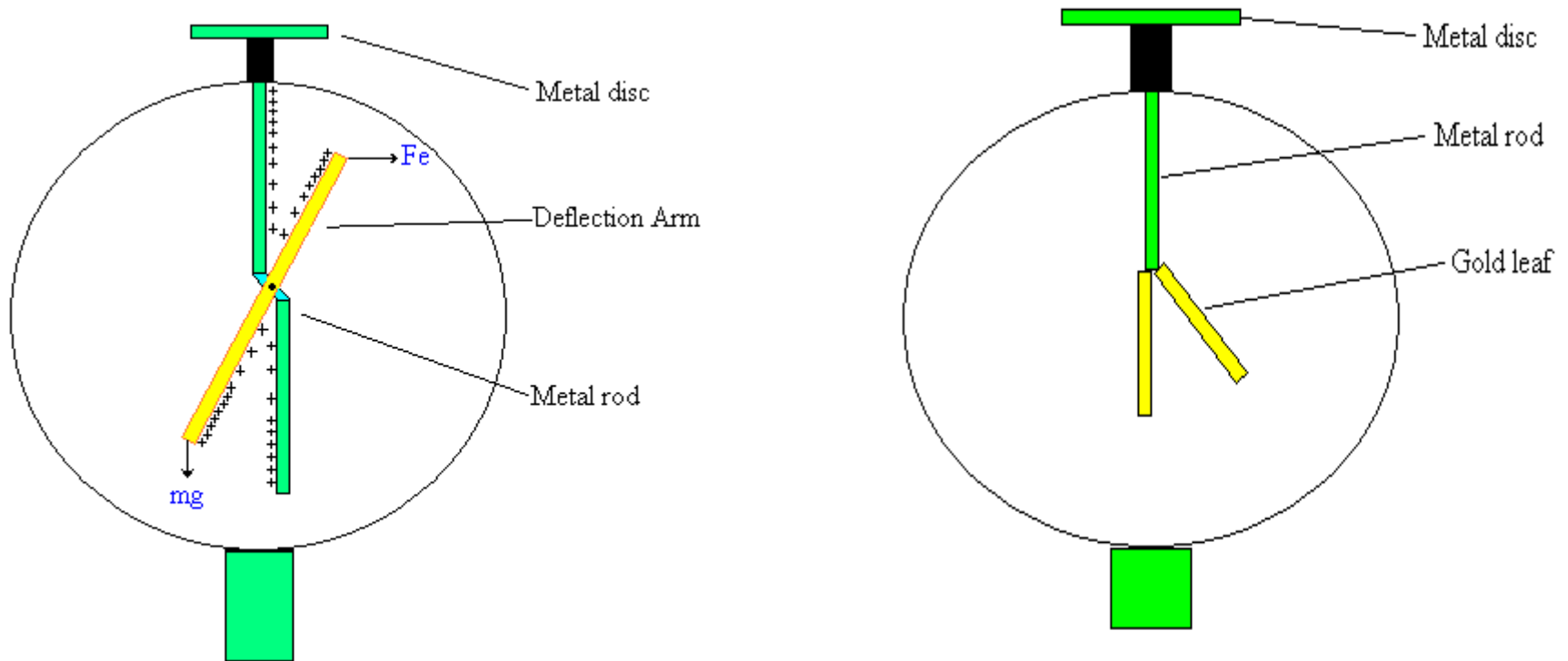
# Właściwości ładunku elektrycznego

Od czasów starożytnych wiadomo, że bursztyn (łac. electrum, gr. elektron) potarty kawałkiem futra przyciąga pyłki, skrawki materiału itp. Pocieranie jest więc prostym przepisem na kontrolowane wytwarzanie „elektryczności” ! (Inne możliwości kontaktu z elektrycznością dawały pioruny i niektóre gatunki ryb)

(1) Dopiero w XVIII wieku stwierdzono we Francji, że **istnieją dwa rodzaje ładunków elektrycznych**. Nazywamy je „dodatnimi” i „ujemnymi”, bo ich jednoczesne występowanie prowadzi do zmniejszenia obserwowanych skutków. Obecnie możemy mówić o ładunkach zgromadzonych na potartym szkle (+) i potartym bursztynie lub ebonicie (-).

(2) W zwyczajnej materii ładunki dodatnie i ujemne występują w dokładnie równych ilościach. Na przykład atom wodoru jest dokładnie neutralny, choć proton i elektron mają zupełnie różne własności !

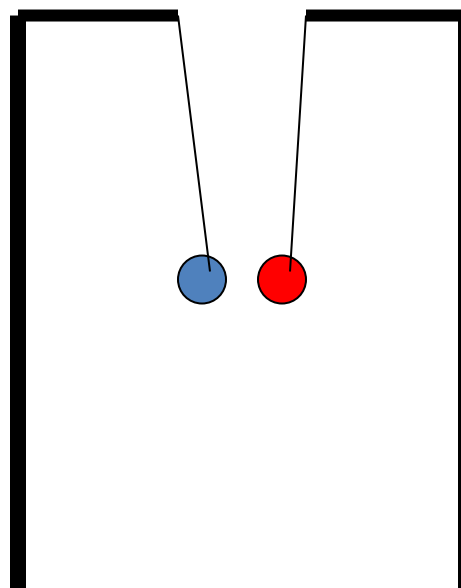
# Przyrząd do podstawowych doświadczeń z elektryczności: **elektroskop**

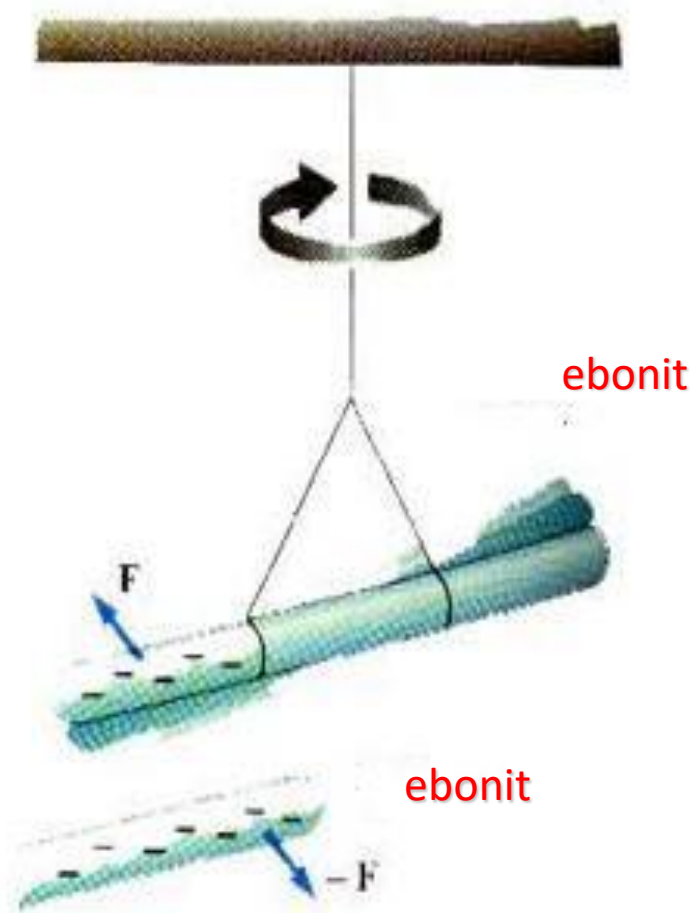
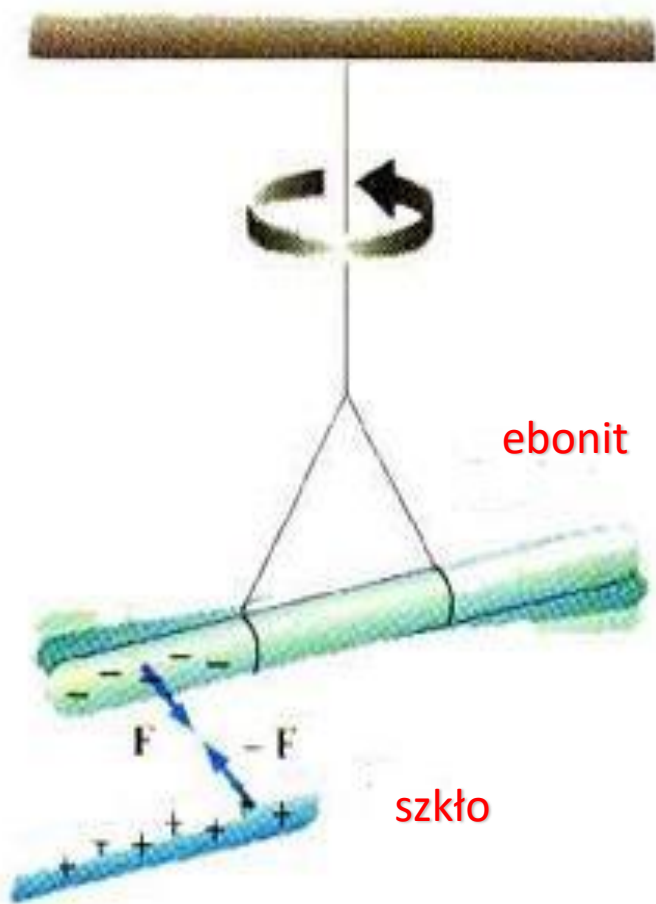


Może posłużyć na przykład do wykazania, że istnieją dwa rodzaje ładunku elektrycznego.



Tak mogłyby wyglądać dalsze doświadczenia z ładunkami elektrycznymi

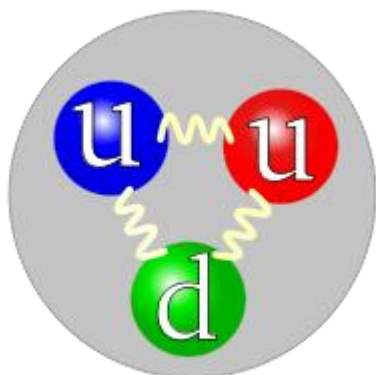




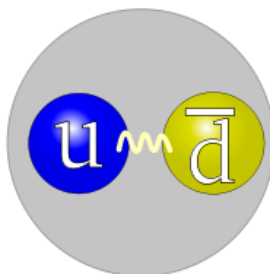
## Właściwości ładunku elektrycznego c.d.

(3) Ładunek elektryczny jest zachowany i nie można w żadnym procesie wytworzyć ładunku netto ! W szczególności pocieranie bursztynu jakimś materiałem prowadzi jedynie do rozdzielenia ładunków między materiał i bursztyn. Zachowanie ładunku jest jednym z najbardziej fundamentalnych praw fizyki.

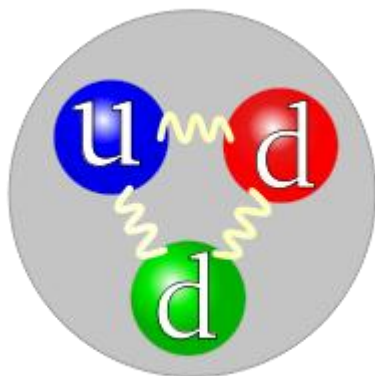
(4) Ładunek elektryczny jest skwantowany, czyli występuje tylko w dyskretnych porcjach, które są całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego,  $e$ . (Na przykład ładunek protonu wynosi  $e$ , a ładunek elektronu wynosi dokładnie  $-e$ .) Nawet jeśli niektóre cząstki zbudowane są z kwarków o ładunkach „ułamkowych”, to swobodnych kwarków nie udało się zaobserwować.



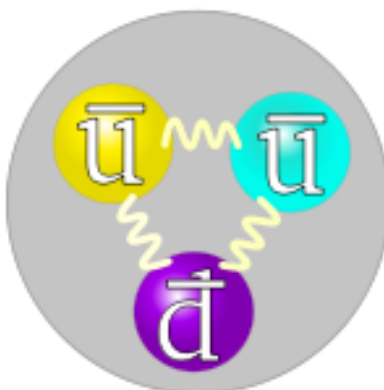
proton



mezon  $\pi^+$



neutron



antyproton

**Kwarki posiadają ładunki ułamkowe**

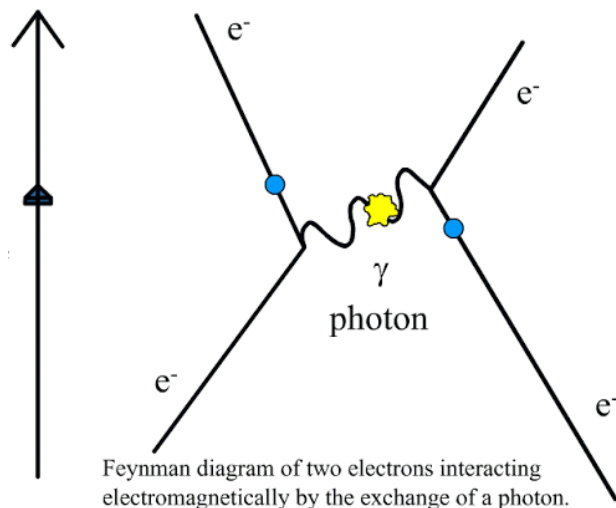
Flavor	Charge
Up	+ 2/3
Down	- 1/3
Charm	+ 2/3
Strange	- 1/3
Top	+ 2/3
Bottom	- 1/3

**Istnieją też antykwarki, które mają ładunki przeciwne do ładunków kwarków**

**Elektrodynamika kwantowa** (Quantum Electrodynamics **QED**) jest teorią, która łączy mechanikę kwantową z wymaganiami szczególnej teorii względności (STW). Opisuje oddziaływanie naładowanych leptonów (elektronów, mionów, taonów) i kwarków z fotonami.

Ponieważ kwarki nie są swobodne, ale uwięzione w hadronach przy pomocy silnych oddziaływań, opis oddziaływań elektromagnetycznych z nukleonami, innymi cząstkami, które mają wewnętrzną strukturę, a także z jądrami atomowymi jest bardzo skomplikowany.

Fotony nie tylko same mogą oddziaływać z cząstkami naładowanymi, ale także **pośredniczą** w oddziaływaniach między cząstkami naładowanymi. Technicznym narzędziem QED są tzw. diagramy Feynmana, a punktem wyjścia funkcja Lagrange'a dla (na przykład) pola elektronowego oddziałującego z polem fotonowym.



obrazek ze strony: <https://www.vivaxsolutions.com/physics/feynman-diagrams.aspx>

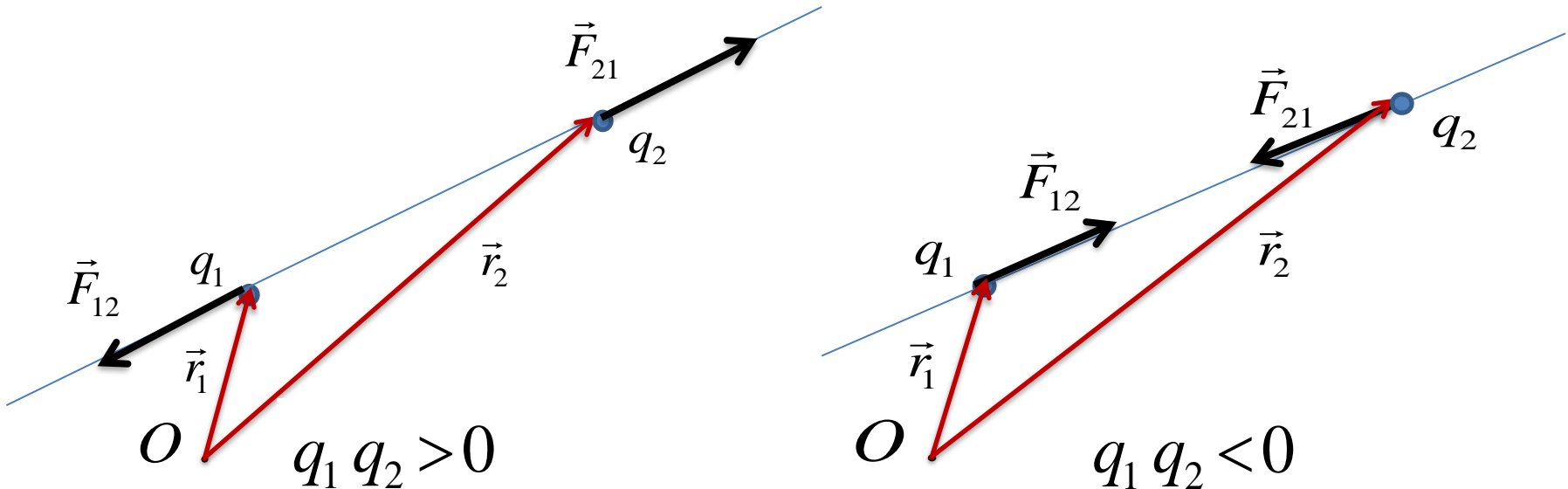
# Elektrostatyka

Problem (wydawałoby się łatwy) oddziaływań poruszających się ładunków wymaga m.in. włączenia STW, więc zaczynamy od czegoś prostszego.

Podzielimy umownie ładunki na tzw. źródła (ładunki nieruchome) i zbadamy ich oddziaływanie na ładunek próbny (który może się poruszać).

Punkt wyjścia to **prawo Coulomba**, które mówi o sile, z jaką działają na siebie dwa ładunki punktowe:

siła działająca na  $q_2$   $\rightarrow \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

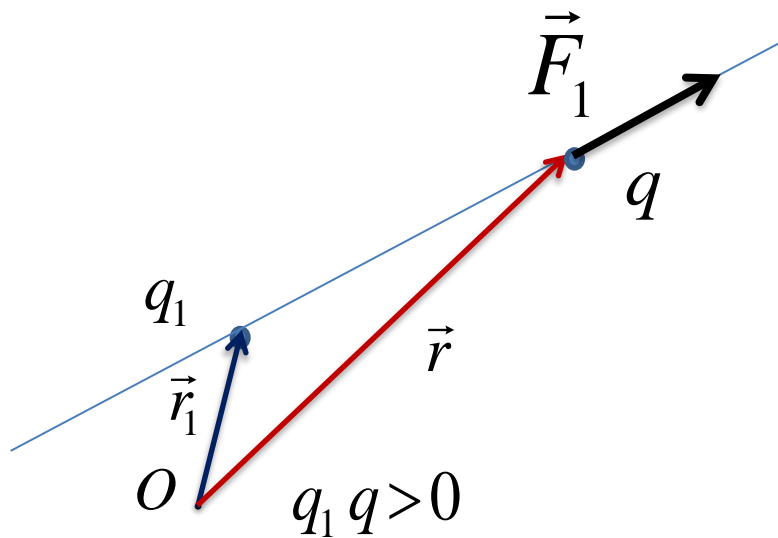


# Co dzieje się, gdy mamy więcej ładunków ?

Najpierw pozwólmy działać na  $q$  osobno siłom pochodzącym od ładunków  $q_1$  i  $q_2$

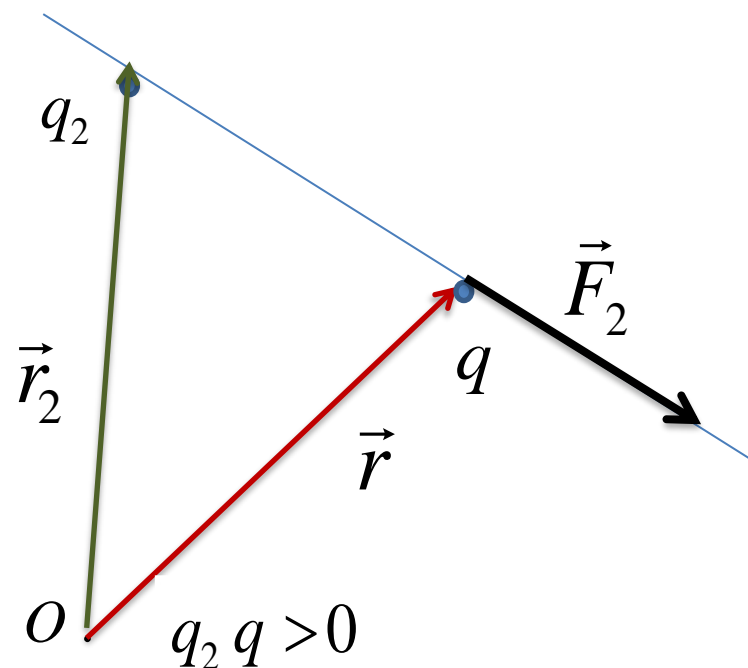
$$\vec{F}_1 = k \frac{q_1 q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

siła działająca na  $q$  ze strony  $q_1$



$$\vec{F}_2 = k \frac{q_2 q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2)$$

siła działająca na  $q$  ze strony  $q_2$

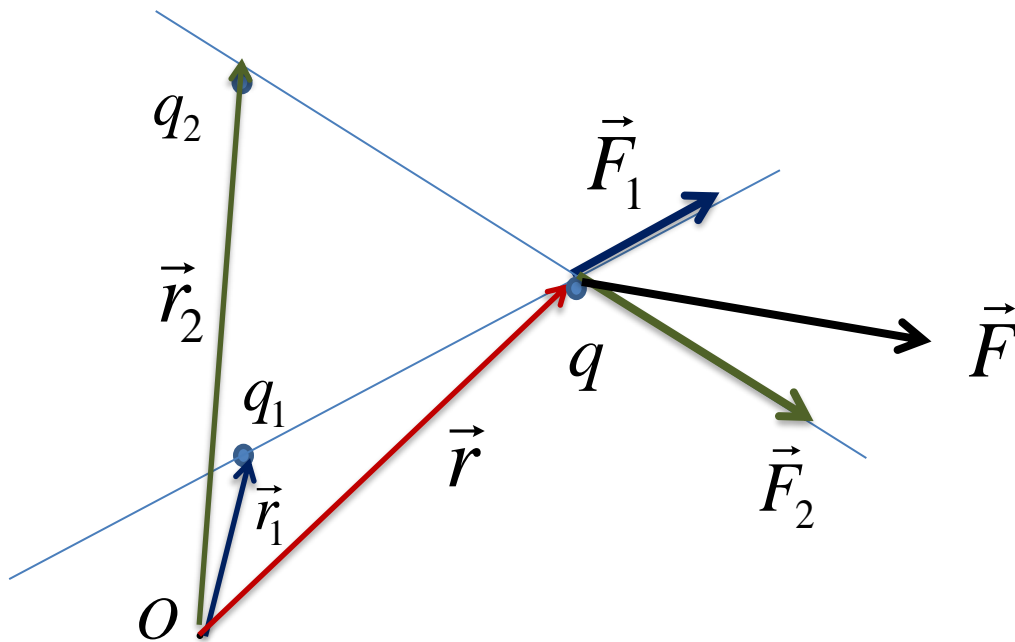


Teraz niech ładunek (próbny)  $q$  znajduje się w obecności obu ładunków  $q_1$  i  $q_2$ .

Jaka siła działa na ładunek  $q$  ?

Okazuje się, że siła działająca na  $q$  jest równa sumie wektorowej sił działających **niezależnie** ze strony  $q_1$  i  $q_2$ .

**Jest to zasada superpozycji.**



$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= k \frac{q_1 q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) \\ &\quad + k \frac{q_2 q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2)\end{aligned}$$



Zasada superpozycji nie jest czymś oczywistym !  
(Istnieją tzw. zjawiska nieliniowe.)

Jest bardzo dobrze potwierdzonym faktem doświadczalnym.

Gdy mamy  $N$  ładunków  $q_1, q_2, \dots, q_N$  rozmieszczonych w przestrzeni, to siła działająca na ładunek  $q$  dana jest wzorem:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \\ &= k q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)\end{aligned}$$

Do tej pory stałą proporcjonalności w prawie Coulomba i we wzorach na siłę wypadkową oznaczaliśmy ogólnie „k”. Teraz rozważymy szczególny układ jednostek.

## Układ SI

Jednostką ładunku jest kulomb (C), który zadany jest przez **ustaloną wartość ładunku elementarnego**.

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{ta wartość jest dana **dokładnie**}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.9875 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{Nm}^2)$$

↑  
przenikalność  
dielektryczna próżni

Wprowadzimy teraz bardzo ważne pojęcie: **pole elektryczne**.

Jest to taka własność przestrzeni, że na ładunek znajdujący się w spoczynku w danym punkcie działa siła proporcjonalna do tego ładunku.

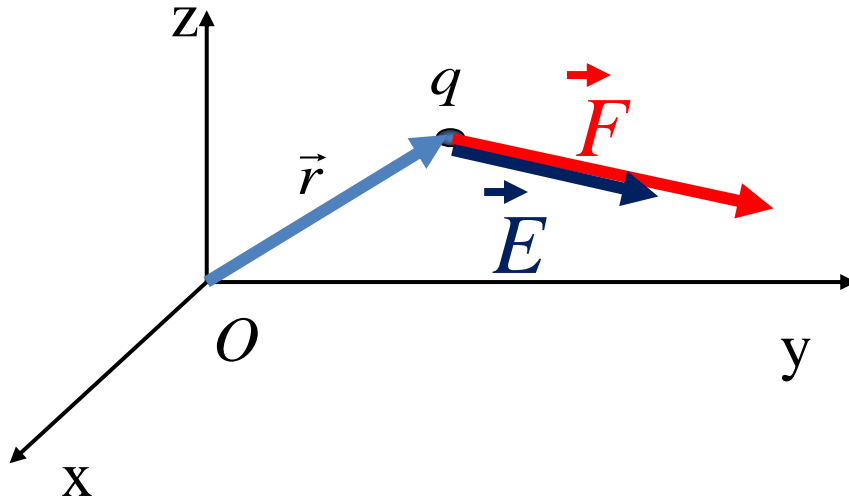
Powiedzmy, że mamy do dyspozycji ładunek (próbny)  $q$ , który możemy swobodnie przemieszczać od punktu do punktu.

Z każdym punktem przestrzeni możemy związać wielkość wektorową, która charakteryzuje pole elektryczne i jest zdefiniowana jako stosunek siły działającej w tym miejscu na ładunek  $q$  (który musi być w spoczynku) i wartości tego ładunku. Jest to **nateżenie pola elektrycznego** !

definicja ogólna

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

natężenie pola  
elektrycznego



To była definicja ogólna – nie pytaliśmy, co było źródłem pola elektrycznego.

W szczególnym przypadku, gdy mamy  $N$  ładunków punktowych  $q_1, q_2, \dots, q_N$  rozmieszczonych w przestrzeni, to natężenie pola elektrycznego wytwarzane przez ten układ ładunków dane jest wzorem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N}{q} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{q} = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

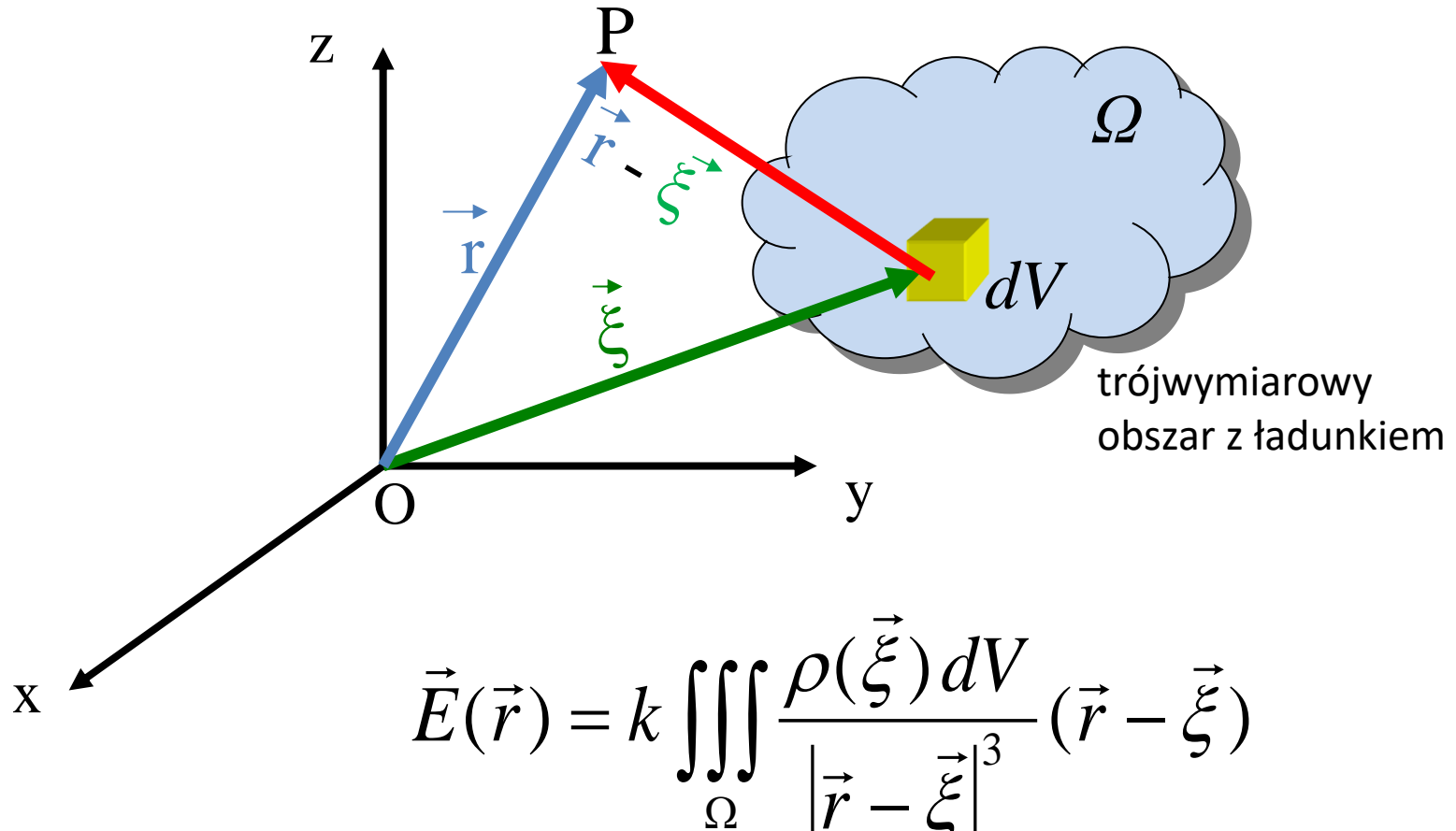
Podobnie, jak w mechanice, gdzie rozważaliśmy nie tylko układy przeliczalnych punktów materialnych, ale także ciągłe rozkłady masy (np. definicje środka masy, czy momentów bezwładności) tak samo w elektrostatyce wygodnie jest wprowadzić ciągłe rozkłady ładunku elektrycznego i odpowiednie funkcje gęstości ładunku (gęstości objętościowej, powierzchniowej lub liniowej).

Dla gęstości objętościowej,  $\rho(x,y,z)$ , wyrażonej w  $[C/m^3]$ , ładunek zawarty w elemencie objętości  $dV$  jest równy  $dQ = \rho dV$ .

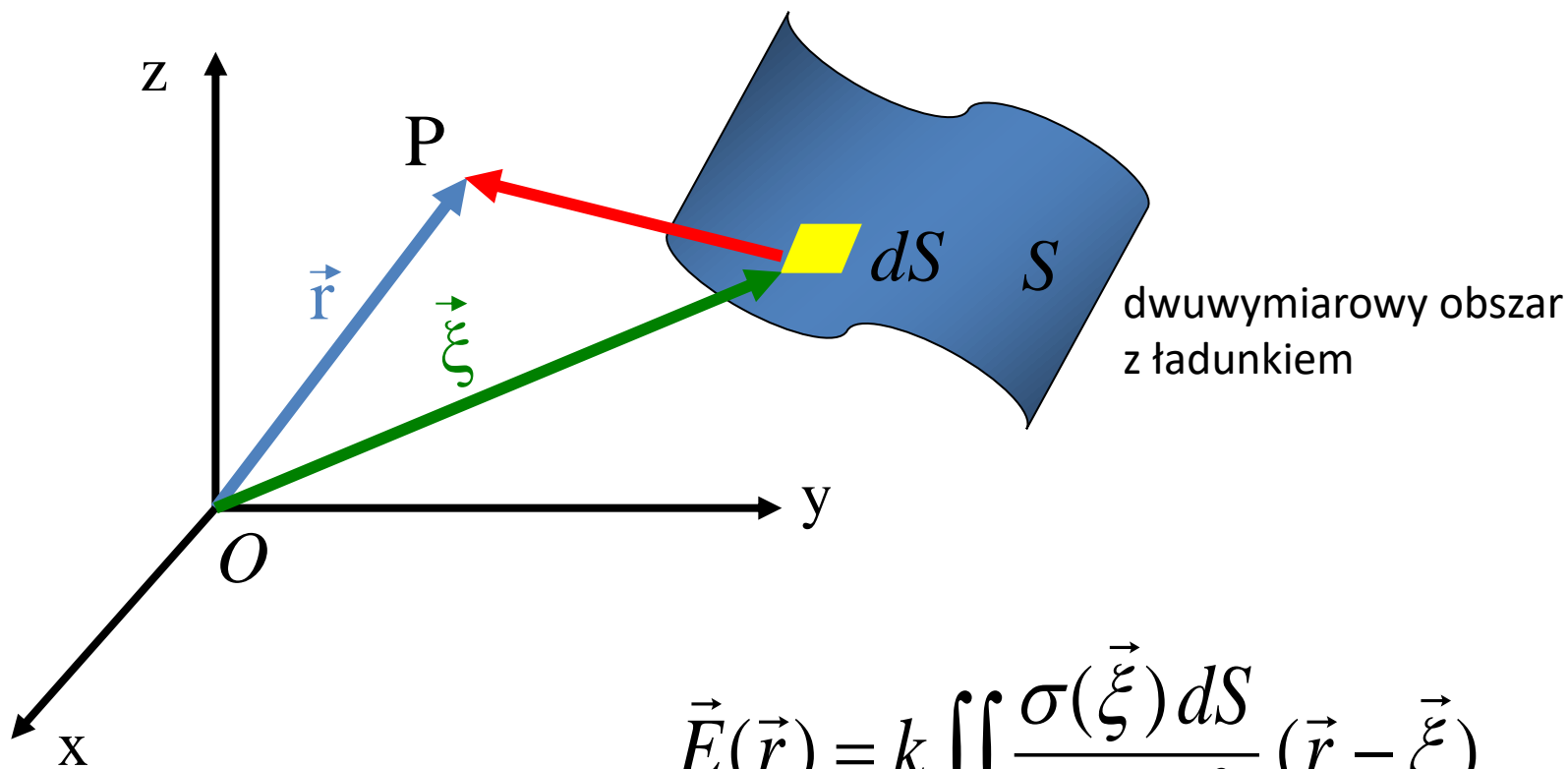
Dla gęstości powierzchniowej,  $\sigma(x,y,z)$ , wyrażonej w  $[C/m^2]$ , ładunek zawarty w elemencie powierzchni  $dS$  jest równy  $dQ = \sigma dS$ .

Dla gęstości liniowej,  $\lambda(x,y,z)$ , wyrażonej w  $[C/m]$ , ładunek zawarty w elemencie długości  $dl$  jest równy  $dQ = \lambda dl$ .

Dla ładunku rozłożonego w obszarze  $\Omega$  z gęstością objętościową  $\rho(x,y,z)$ .

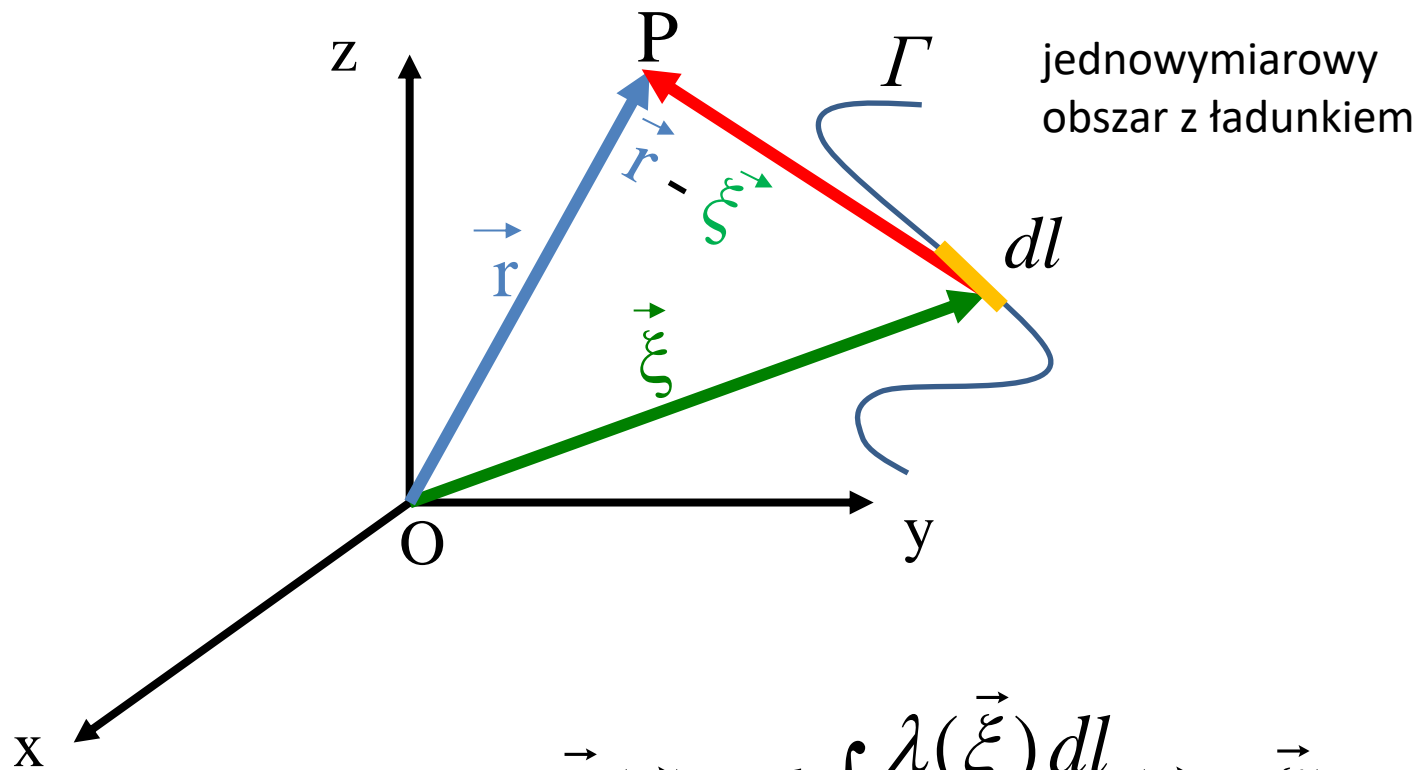


Dla ładunku rozłożonego na powierzchni  $S$  z gęstością powierzchniową  $\sigma(x,y,z)$ .



$$\vec{E}(\vec{r}) = k \iint_S \frac{\sigma(\vec{\xi}) dS}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})$$

Dla ładunku rozłożonego w na linii  $\Gamma$  z gęstością liniową  $\lambda(x,y,z)$ .



$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{\xi}) dl}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})$$

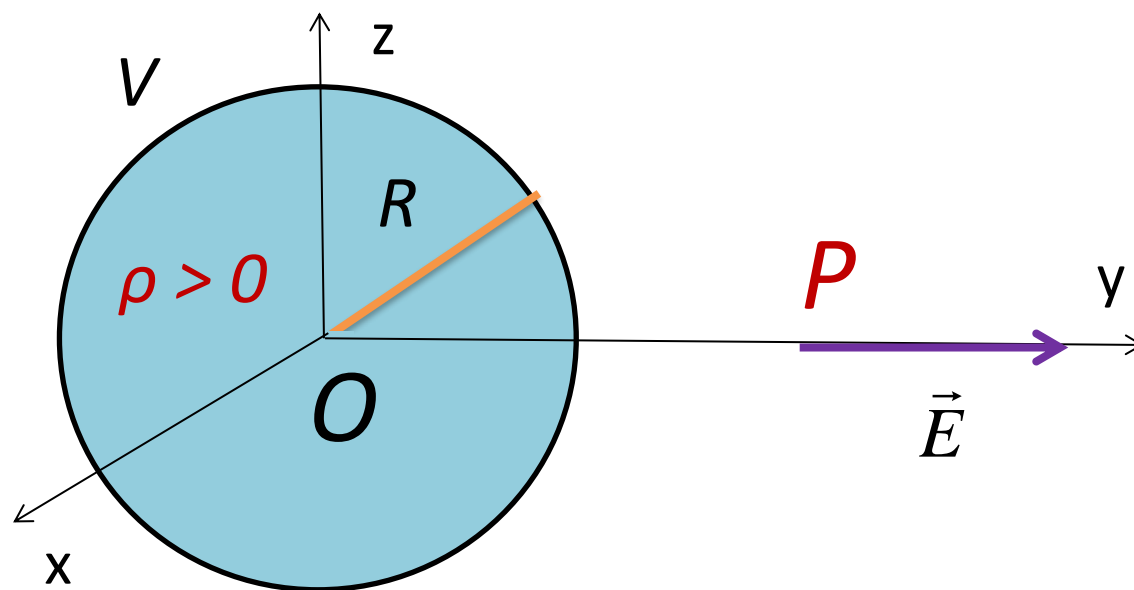


Przykład 1: pole elektryczne na zewnątrz jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $Q$ .

Podstawą obliczeń jest wybór rozsądnej parametryzacji trójwymiarowego obszaru wypełnionego ładunkiem  $\rightarrow$  współrzędne sferyczne.

**Aby rachunki były najprostsze, trzeba zwracać uwagę na symetrię problemu !**

$$V = \{(x' = r' \sin \theta \cos \phi, \\ y' = r' \sin \theta \sin \phi, \\ z' = r' \cos \theta) \in \mathbb{R}^3, \\ r' \in [0, R], \\ \theta \in [0, \pi], \\ \phi \in [0, 2\pi] \}, R > 0$$



Wystarczy policzyć pole na przykład na osi y.

Z symetrii zagadnienia oraz zasady superpozycji wynika, że pole elektryczne ma tylko składową wzdłuż osi y. Ile wynosi  $E_y(x=0, y > R, z=0)$  ?

$$E_y(x=0, y > R, z=0) = k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{\xi}) dV}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})_y$$

$$\vec{r} = (0, y > R, 0),$$

$$\vec{\xi} = (r' \sin \theta \cos \phi, r' \sin \theta \sin \phi, r' \cos \theta),$$

$$dV = (r' d\theta)(r' \sin \theta d\phi)(dr') = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi,$$

$$\rho(\vec{\xi}) = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \text{const}$$

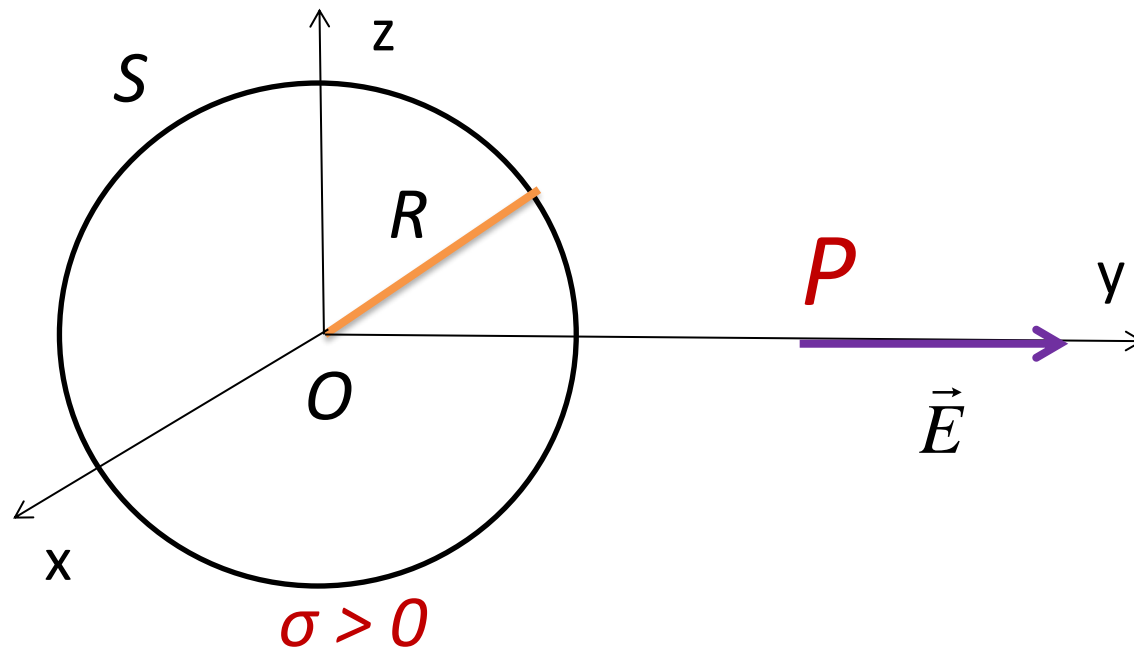
$dV$  jest iloczynem długości trzech boków prostopadłościanu: wzdłuż „południka”, wzdłuż równoleżnika i wzdłuż promienia

$$\begin{aligned}
& E_y(0, y > R, 0) \\
&= k \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(y - r' \sin \theta \sin \phi) dr' r'^2 \sin \theta d\theta d\phi}{(r'^2 + y^2 - 2r' y \sin \theta \sin \phi)^{\frac{3}{2}}} \\
&= k \rho \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{y^2} = k \frac{Q}{y^2}
\end{aligned}$$

Całka jest nietrywialna, ale wynik jest taki, jak gdyby cały ładunek kuli był ładunkiem punktowym znajdującym się w środku kuli.

Przykład 2: pole elektryczne na zewnątrz jednorodnie naładowanej powierzchniowo sfery o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $Q$ .

$$S = \{(x' = R \sin \theta \cos \phi, \\ y' = R \sin \theta \sin \phi, \\ z' = R \cos \theta) \in R^3, \\ \theta \in [0, \pi], \\ \phi \in [0, 2\pi]\}, R > 0$$



Wystarczy policzyć pole na przykład na osi y.

Z symetrii zagadnienia oraz zasady superpozycji wynika, że pole elektryczne ma tylko składową wzdłuż osi y. Ile wynosi  $E_y(x=0, y > R, z=0)$  ?

$$E_y(x=0, y > R, z=0) = k \iint_S \frac{\sigma(\vec{\xi}) dS}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})_y$$

$$\vec{r} = (0, y > R, 0),$$

$$\vec{\xi} = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta),$$

$$dS = (R d\theta)(R \sin \theta d\phi) = R^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

$$\sigma(\vec{\xi}) = \frac{Q}{4\pi R^2} = \text{const}$$

$dS$  jest iloczynem  
długości dwóch  
łuków: wzdłuż  
„południka” i wzdłuż  
równoleżnika

$$E_y(0, y > R, 0)$$

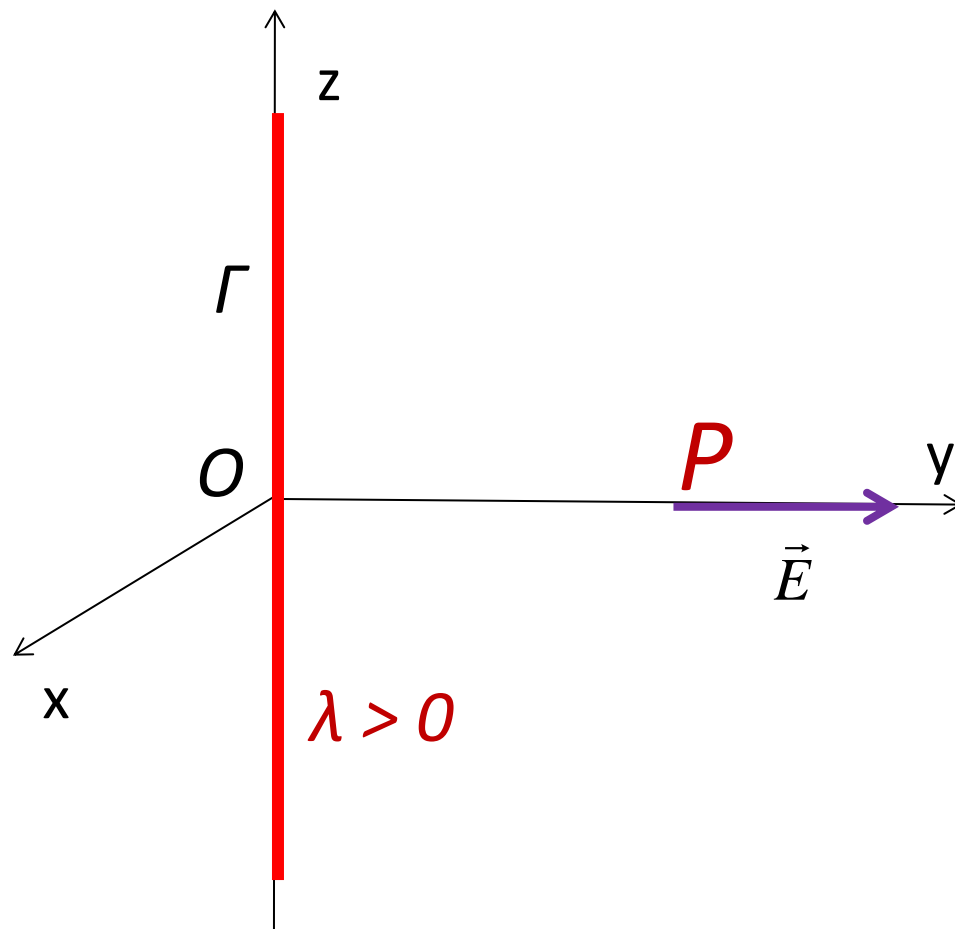
$$= k\sigma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(y - R \sin \theta \sin \phi) R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{(R^2 + y^2 - 2Ry \sin \theta \sin \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= k\sigma \frac{4\pi R^2}{y^2} = k \frac{Q}{y^2}$$

Całka jest znowu nietrywialna, ale wynik jest taki, jak gdyby cały ładunek sfery był ładunkiem punktowym znajdującym się w środku sfery, czyli w początku układu.

Przykład 3: pole elektryczne pochodzące od jednorodnie naładowanej liniowo nieskończenie długiej prostoliniowej nici.

$$\Gamma = \{ (x' = 0, y' = 0, z' = t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \}$$



Wystarczy policzyć pole na przykład na osi  $y$ .

Z symetrii zagadnienia oraz zasady superpozycji wynika, że pole elektryczne ma tylko składową wzdłuż osi  $y$ . Ile wynosi  $E_y(x=0, y > 0, z=0)$  ?

$$E_y(x=0, y > 0, z=0) = k \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{\xi}) dl}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})_y$$

$$\vec{r} = (0, y > 0, 0),$$

$$\vec{\xi} = (0, 0, t), t \in R,$$

$$dl = dt,$$

$$\lambda(\vec{\xi}) = \text{const}$$



$$E_y(0, y > 0, 0) = k\lambda y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k\lambda}{y}$$

Całka jest tym razem prosta, a wynik wskazuje, że wartość natężenia pola elektrycznego maleje odwrotnie proporcjonalnie do odległości od naładowanej nici.

Dla nieskończenie długiej nici wynik nie zależy od  $z$ . W praktyce wynik może być użyteczny, jeśli znajdujemy się blisko naładowanej liniowo nici, z dala od jej brzegów.

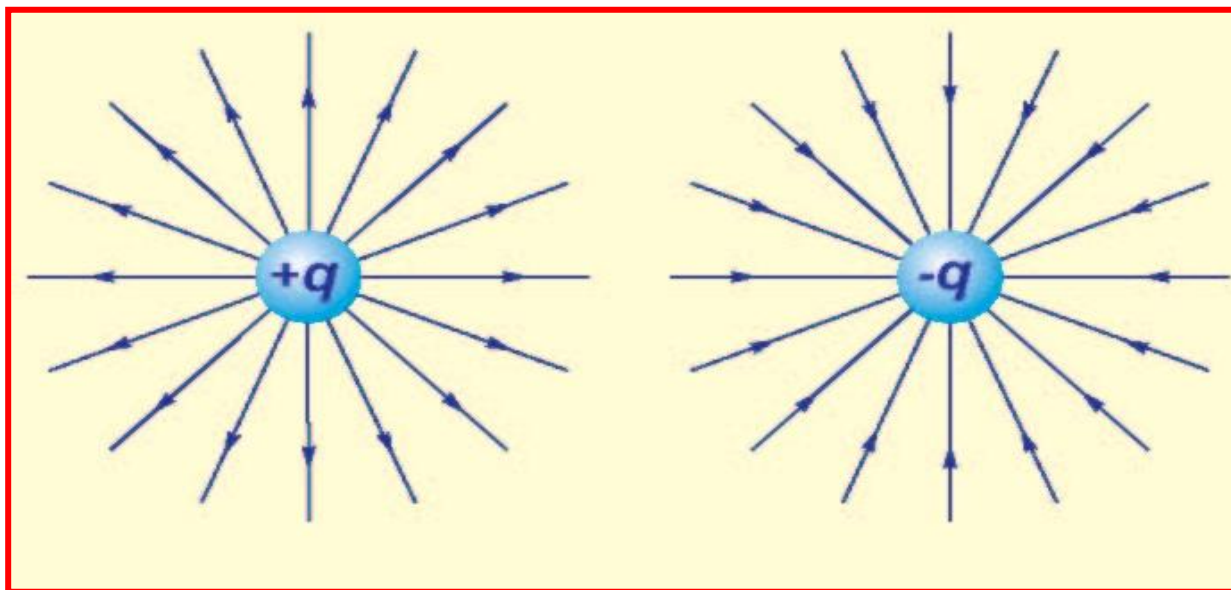
Można też bez problemu policzyć pole od nici o skończonej długości, która rozciąga się w przedziale  $[z_1, z_2]$  na osi  $z$ . Uwaga: w tym przypadku pole elektryczne ma też niezerową składową w kierunku osi  $z$  i trzeba je wyznaczyć w dowolnym punkcie półprzestrzeni  $yz$  ( $y > 0$ ). Inne przypadki wynikają z symetrii !

$$\begin{aligned}
 E_y(x=0, y>0, z) &= k \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{\xi}) dl}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})_y \\
 &= k \lambda y \int_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{\left( (t-z)^2 + y^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{k \lambda}{y} \left( \frac{z - z_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + y^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z_2 - z)^2 + y^2}} \right)
 \end{aligned}$$

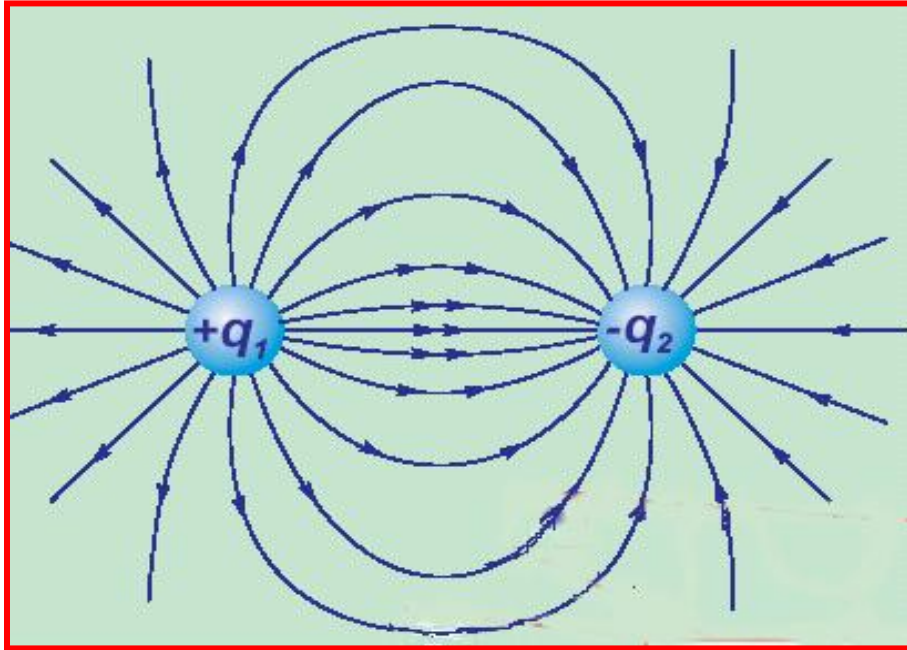
$$\begin{aligned}
E_z(x=0, y>0, z) &= k \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{\xi}) dl}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} (\vec{r} - \vec{\xi})_z \\
&= k \lambda \int_{z_1}^{z_2} \frac{(z-t) dt}{\left( (t-z)^2 + y^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= k \lambda \left( \frac{1}{\sqrt{(z-z_2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + y^2}} \right)
\end{aligned}$$

## Jak można zobrazować pole wektorowe ?

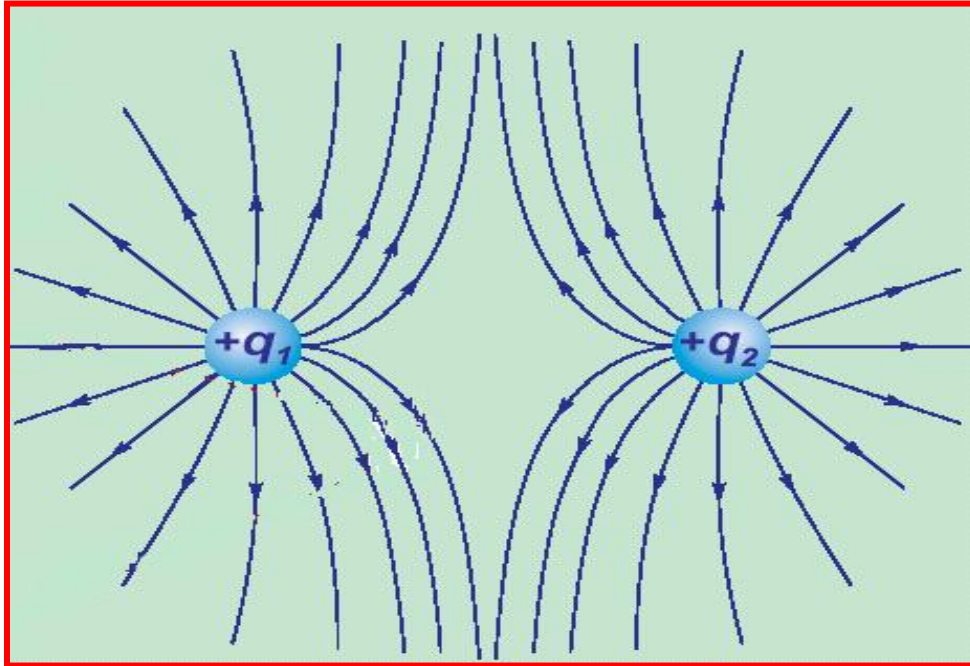
Jednym ze sposobów graficznego przedstawienia pola elektrycznego jest wyrysowanie **linii pola**. Są to linie o tej własności, że wektor natężenia pola elektrycznego jest styczny do linii pola w każdym jej punkcie. Im większa gęstość linii, tym większa wartość natężenia pola elektrycznego.



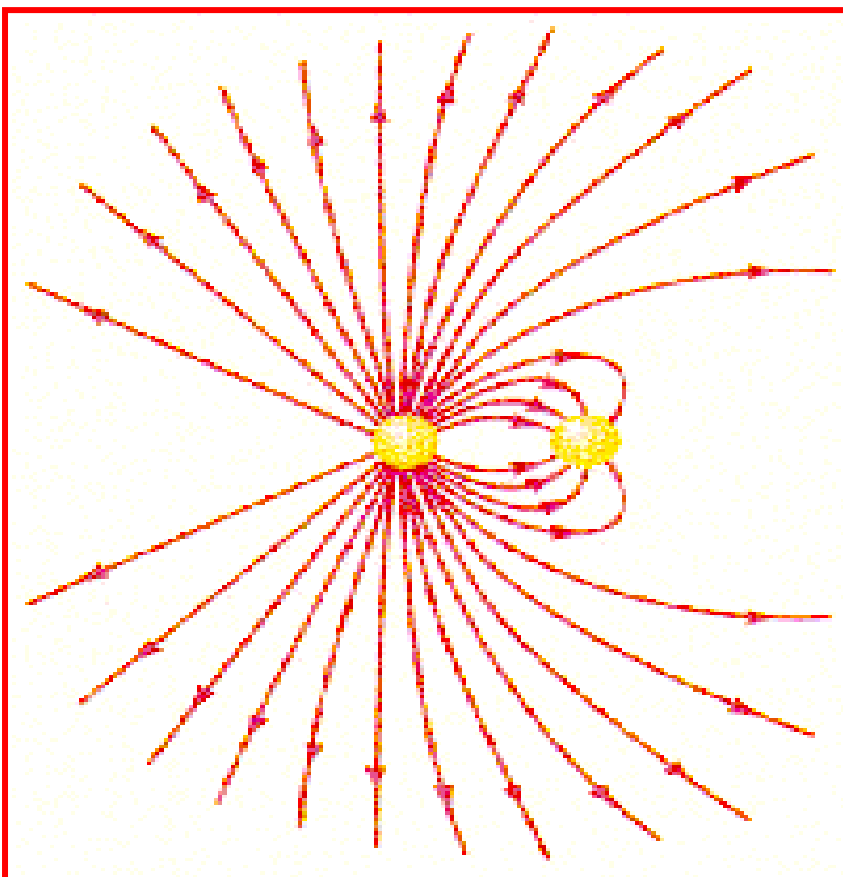
Linie pola  
dla ładunków  
pojedynczych.



Linie pola dla dwóch ładunków o przeciwnych znakach i tej samej wartości bezwzględnej. (Układ taki nazywamy dipolem elektrycznym.)



Linie pola dla dwóch takich samych ładunków dodatnich. Dla dwóch równych ujemnych ładunków zwrot wszystkich linii byłby przeciwny.



Linie pola dla dwóch ładunków przeciwnego znaku o nierównej wartości bezwzględnej. Lewy ładunek jest dodatni, bo linie pola z niego wychodzą !

Polecam notebook ze strony Wolfram Demonstrations Project:

<http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/>

[ElectricFieldLinesDueToACollectionOfPointCharges-author.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/ElectricFieldLinesDueToACollectionOfPointCharges-author.nb)

oraz moje własne produkcje

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/calcki\\_ciagle\\_rozkłady\\_ladunkow.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/calcki_ciagle_rozkłady_ladunkow.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/linie\\_pola\\_elektrycznego.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/linie_pola_elektrycznego.nb)



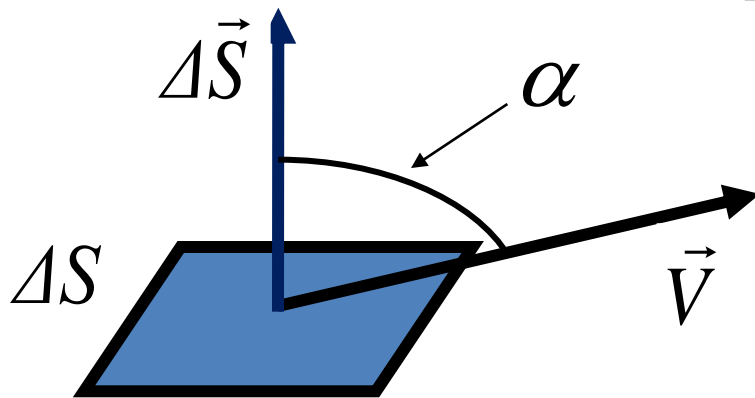
Okazuje się, że w kilku ważnych przypadkach można policzyć pole elektryczne, nie korzystając z zasady superpozycji, ale wprowadzając pojęcie **strumienia** pola elektrycznego.

## Strumień wielkości wektorowej

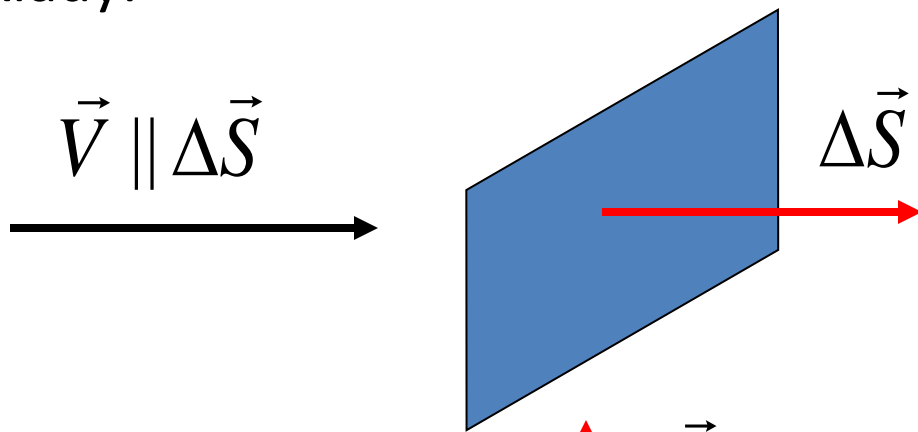
Najpierw najprostsza sytuacja.

Zakładamy, że mamy do czynienia z płaskim elementem powierzchni  $\Delta S$ , który jest reprezentowany przez wektor normalny (prostopadły do powierzchni)  $\Delta \vec{S}$ . Pole wektorowe  $\vec{V}$  jest stałe dla wszystkich punktów powierzchni  $\Delta S$ . Wówczas strumień pola wektorowego  $\vec{V}$  przez powierzchnię  $\Delta S$  wynosi:

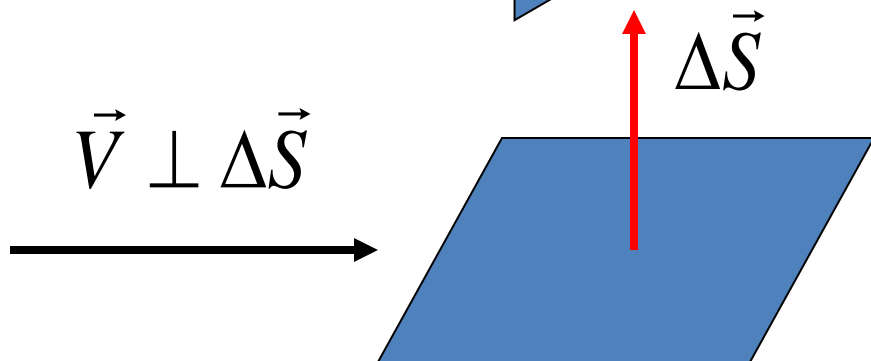
$$\Phi = \vec{V} \cdot \Delta \vec{S} = |\vec{V}| |\Delta \vec{S}| \cos \alpha$$



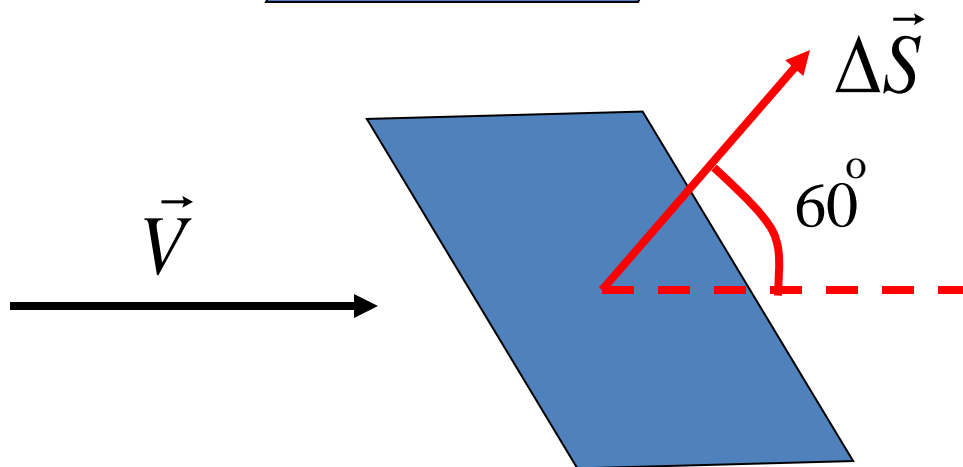
Przykłady:



$$\Phi = V \Delta S$$



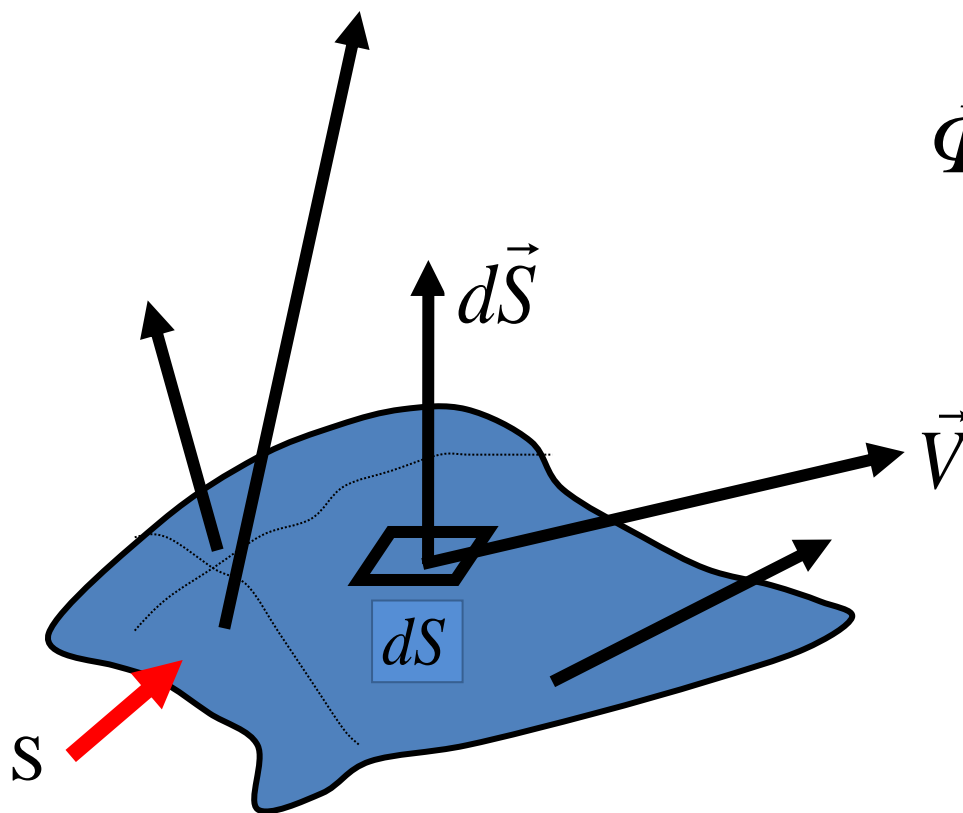
$$\Phi = 0$$



$$\Phi = \frac{1}{2} V \Delta S$$

W ogólnym przypadku mamy całkę powierzchniową

Całka powierzchniowa drugiego rodzaju  $\rightarrow$  nietrywialny jest już sam zapis, gdy startujemy z parametryzacji  $x=x(t,s)$ ,  $y=y(t,s)$ ,  $z=z(t,s)$  !

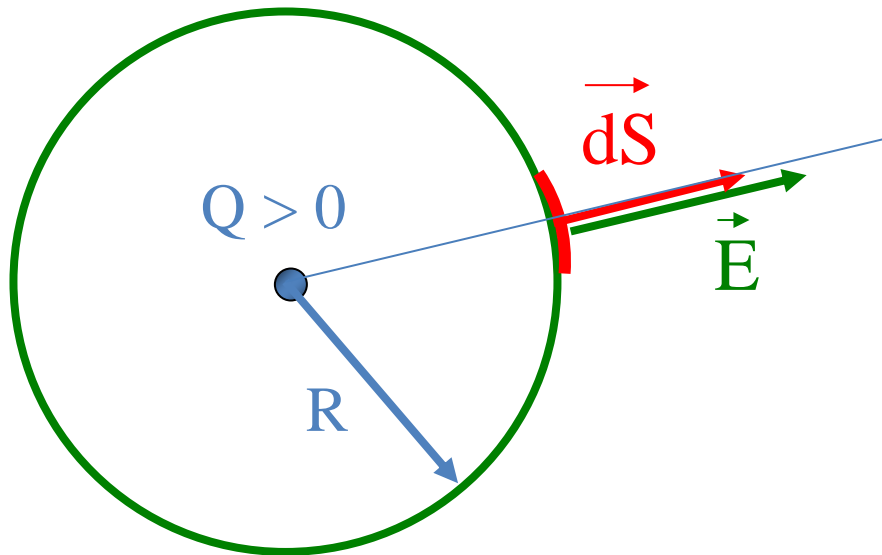


$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Przechodzimy do elektrostatyki

Przypadek pierwszy:

Otoczamy pojedynczy ładunek  $Q > 0$  sferą o promieniu  $R$  i liczymy strumień natężenia pola elektrycznego przez tę powierzchnię zamkniętą. Dla każdego elementu powierzchni sfery wektor normalny wskazuje na zewnątrz sfery (umowa !) i jest skierowany wzdłuż promienia sfery.



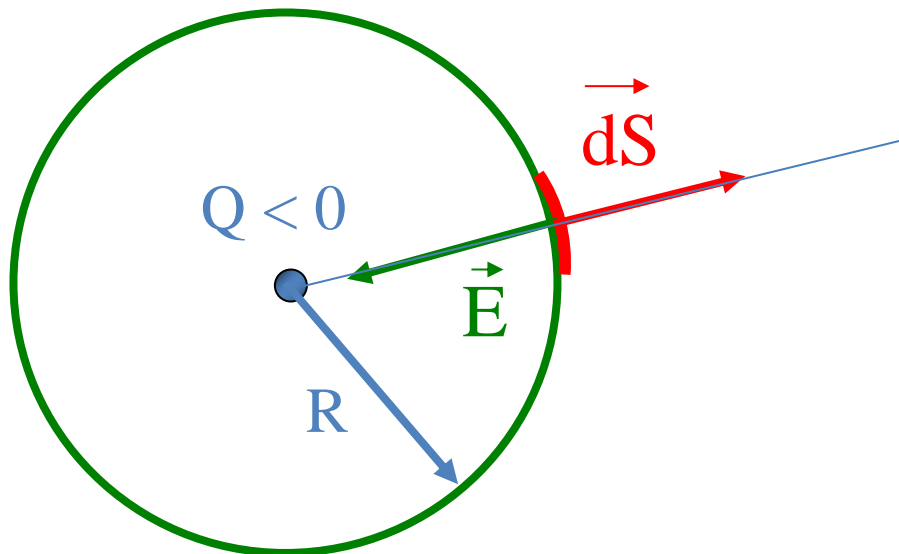
W każdym punkcie sfery natężenie pola elektrycznego ma tę samą wartość i jest skierowane wzdłuż promienia.

Dla  $Q > 0$ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{Sfera} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{Sfera} |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos 0 \\ &= |\vec{E}| \iint_{Sfera} dS = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi k Q \\ &= (SI) = \frac{Q}{\epsilon_0} > 0\end{aligned}$$

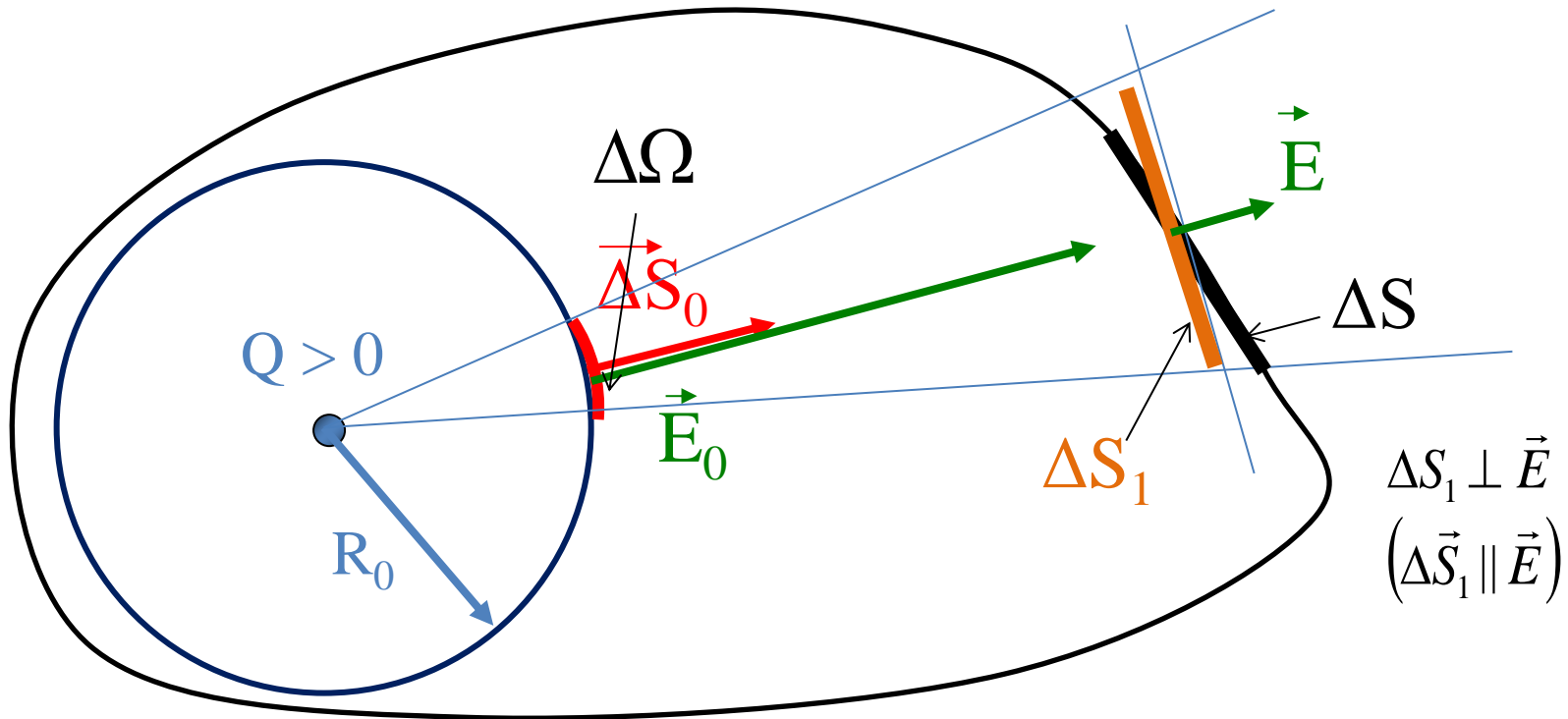
Dla  $Q < 0$ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{\text{Sfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Sfera}} |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos(180^\circ) \\ &= -|\vec{E}| \iint_{\text{Sfera}} dS = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi k Q \\ &= (SI) = \frac{Q}{\epsilon_0} < 0\end{aligned}$$



Strumień nie zależy od promienia sfery, a tylko od ładunku w środku sfery. Jest do ładunku wprost proporcjonalny !

Teraz weźmiemy pojedynczy ładunek, powiedzmy  $Q > 0$ , i otoczmy go **dowolną** powierzchnią zamkniętą:



Rozważając strumień  $\Delta\Phi$  odpowiadający bardzo małemu kątowi bryłowemu  $\Delta\Omega$ , dochodzimy do wniosku, że

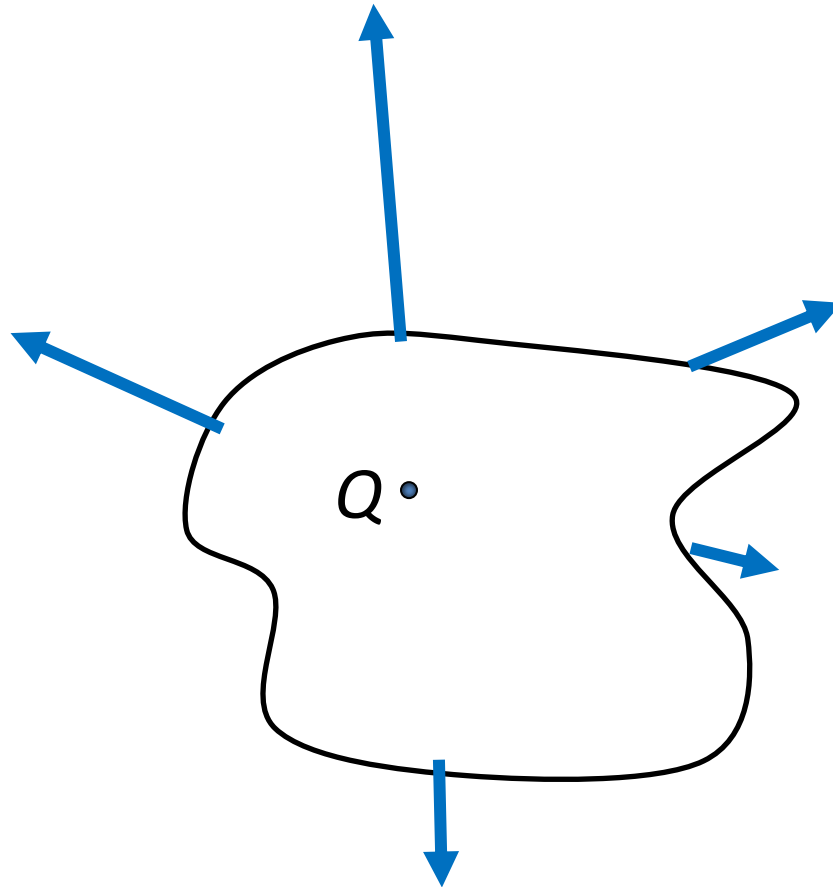
$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}_1 = \vec{E}_0 \cdot \Delta\vec{S}_0$$

Całkowity strumień, po uwzględnieniu pełnego kąta bryłowego, nie zależy od kształtu powierzchni zamkniętej! Natężenie zmienia się jak  $1/r^2$ , a istotna powierzchnia wycinana przez  $\Delta\Omega$  ( $\Delta S_1$ ) rośnie jak  $r^2$ .



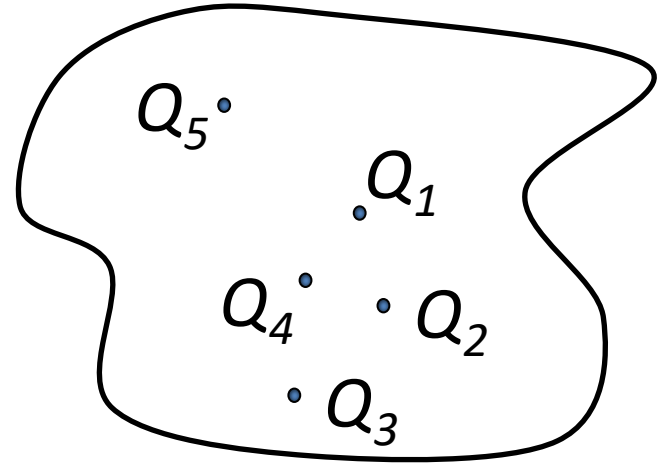
Dlatego dla **dowolnej** powierzchni zamkniętej zawierającej pojedynczy ładunek  $Q$  :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k Q = (SI) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



## Przypadek trzeci:

(a) Dowolna powierzchnia zamknięta zawierająca ładunki punktowe  $Q_i$



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \cdot d\vec{S} =$$

$$= \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oint_S \vec{E}_N \cdot d\vec{S}$$

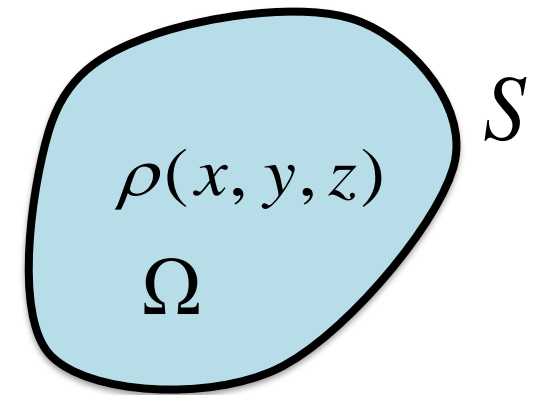
$$= 4\pi k (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N) = (SI)$$

$$= \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N}{\epsilon_0} = \frac{Q^{tot}}{\epsilon_0}$$

ładunek całkowity  
wewnątrz powierzchni  
zamkniętej

Przypadek trzeci:

(b) Powierzchnia zamknięta zawiera obszar rozciągniętego ładunku o gęstości objętościowej  $\rho(x,y,z)$ .

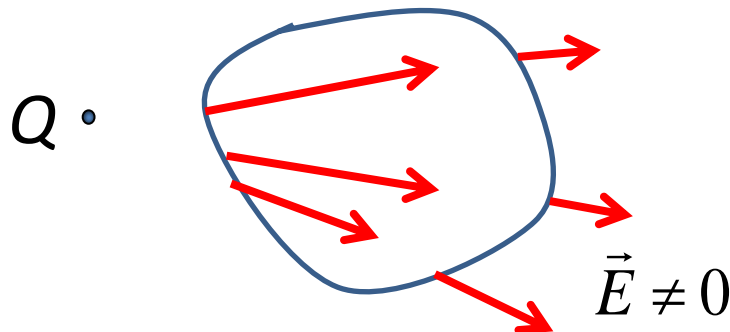


$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV = (SI) = \frac{Q^{tot}}{\epsilon_0}$$

Przypadek czwarty:

Powierzchnia zamknięta nie zawiera żadnego ładunku

(choć na powierzchni natężenie pola elektrycznego nie znika !)



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

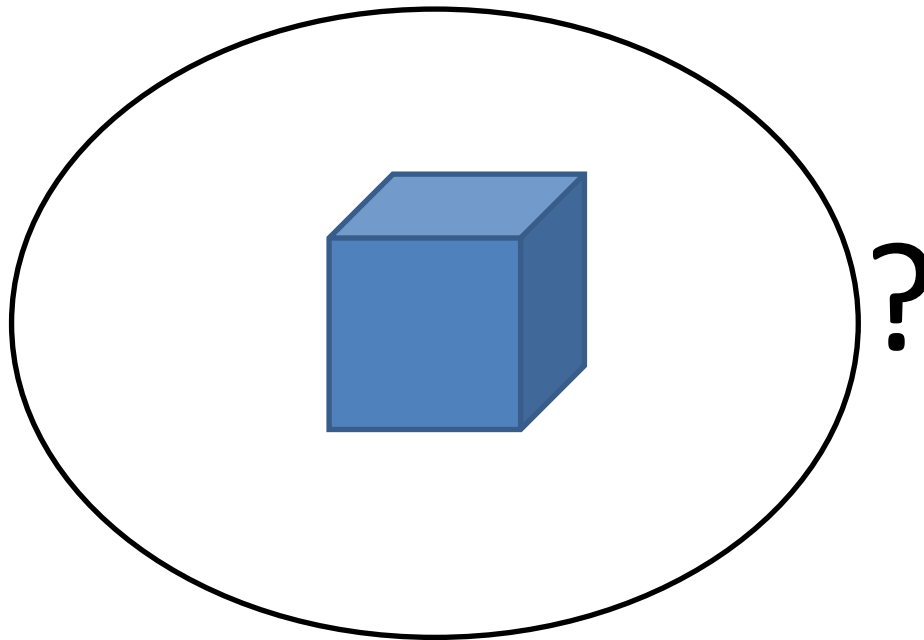
## **Podsumowanie, czyli prawo Gaussa:**

Strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą, obejmującą dowolny rozkład ładunku jest niezależny od kształtu tej powierzchni i zależy jedynie od wielkości ładunku położonego wewnątrz powierzchni.

### **Uwaga:**

Prawo Gaussa jest zawsze spełnione, ale nie zawsze użyteczne !  
Aby z prawa Gaussa uzyskać informacje o wektorze natężenia pola elektrycznego, rozkład ładunku musi być odpowiednio symetryczny.

Prawa Gaussa nie można wykorzystać na przykład do policzenia natężenia pola elektrycznego pochodzącego od jednorodnie naładowanego sześcianu, bo nie istnieje powierzchnia, na której wektor natężenia pola elektrycznego miałby stałą wartość i stały kierunek względem powierzchni !



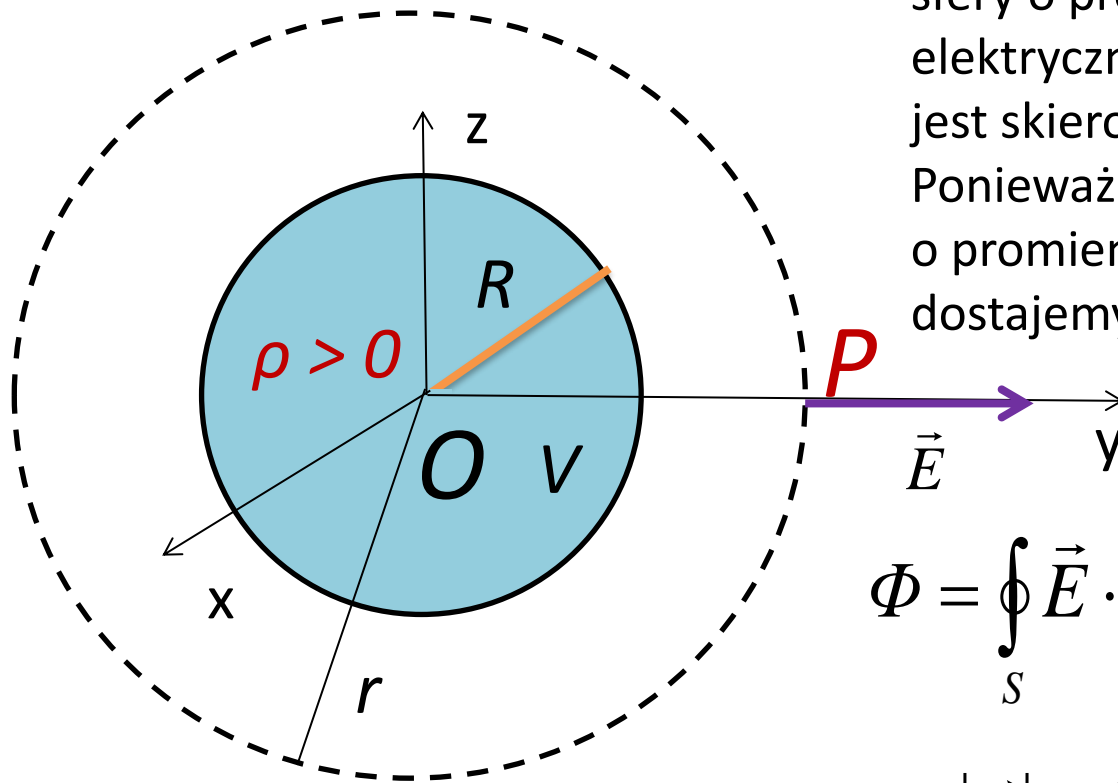
Prawa Gaussa można wykorzystać do znalezienia natężenia pola elektrycznego pochodzącego od:

- jednorodnie naładowanej powierzchniowo nieskończonej płaszczyzny,
- jednorodnie naładowanego objętościowo nieskończonego długiego walca o promieniu  $R$  (na zewnątrz i wewnątrz walca),
- jednorodnie naładowanej powierzchniowo powierzchni bocznej nieskończonego walca o promieniu  $R$  (na zewnątrz i wewnątrz powierzchni walca),
- jednorodnie naładowanej liniowo nieskończonej długiej prostoliniowej nici,
- jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu  $R$  (na zewnątrz i wewnątrz kuli),
- jednorodnie naładowanej powierzchniowo sfery o promieniu  $R$  (na zewnątrz i wewnątrz sfery),
- ładunku punktowego (gdyby prawo Gaussa było znane przed prawem Coulomba 😊)

Wracamy do jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $Q$ .

(a) Natężenie pola elektrycznego na zewnątrz kuli. Otaczamy kulę z ładunkiem fikcyjną sferą o promieniu  $r > R$  i środka w środku naładowanej kuli.

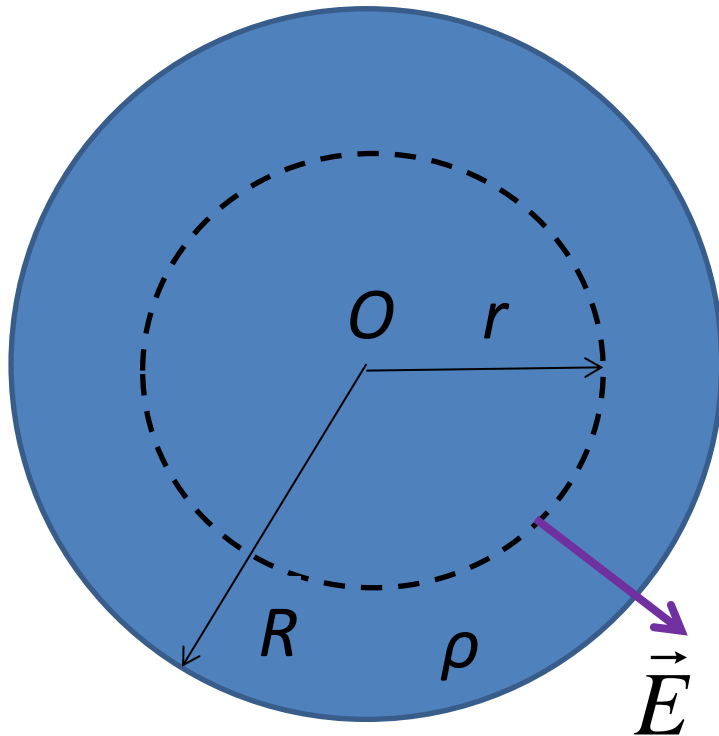
Z symetrii wynika, że w każdym punkcie sfery o promieniu  $r$  natężenie pola elektrycznego ma tę samą wartość i jest skierowane wzdłuż promienia. Ponieważ cały ładunek jest objęty sferą o promieniu  $r$ , z prawa Gaussa dostajemy:



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 |\vec{E}| = 4\pi kQ$$

$$\rightarrow |\vec{E}| = \frac{kQ}{r^2}$$

(b) Natężenie pola elektrycznego wewnątrz kuli. Fikcyjna sfera ma teraz promieniu  $r < R$  i środek w środku naładowanej kuli.



Z symetrii wynika, że w każdym punkcie sfery o promieniu  $r$  natężenie pola elektrycznego ma tę samą wartość i jest skierowane wzdłuż promienia. Sfera o promieniu  $r$  obejmuje tylko część ładunku kuli:

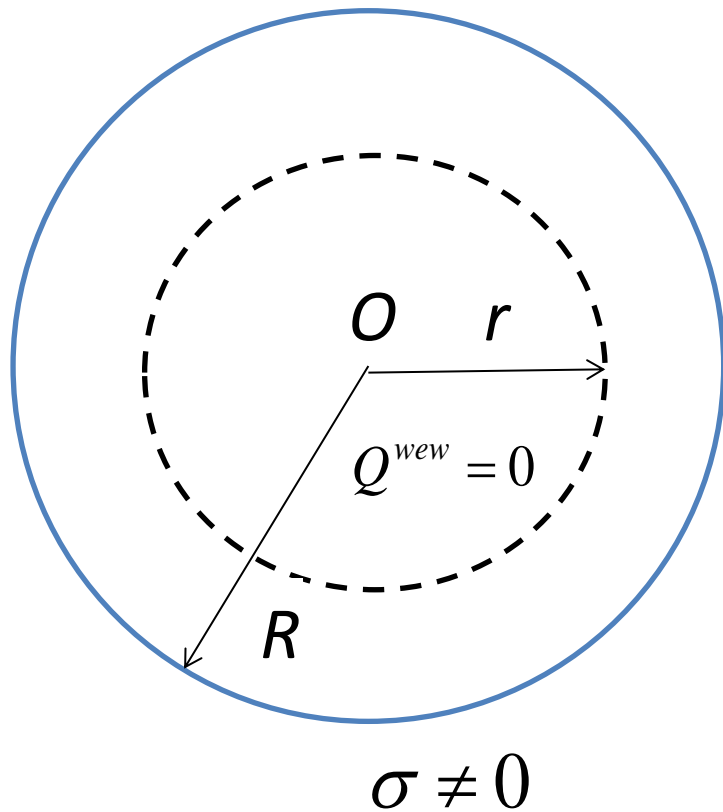
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 |\vec{E}| = 4\pi k \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\rightarrow |\vec{E}| = \frac{4}{3} \pi k \rho r = \frac{kQ}{R^3} r,$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$



Z symetrii zagadnienia i prawa Gaussa wynika, że natężenie pola elektrycznego wewnątrz jednorodnie powierzchniowo naładowanej sfery wynosi zero !



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 |\vec{E}| = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

W dalszej części wykładu przydatny będzie wzór na natężenie pola elektrycznego pochodzącego od jednorodnie naładowanej powierzchniowo nieskończonej płaszczyzny.

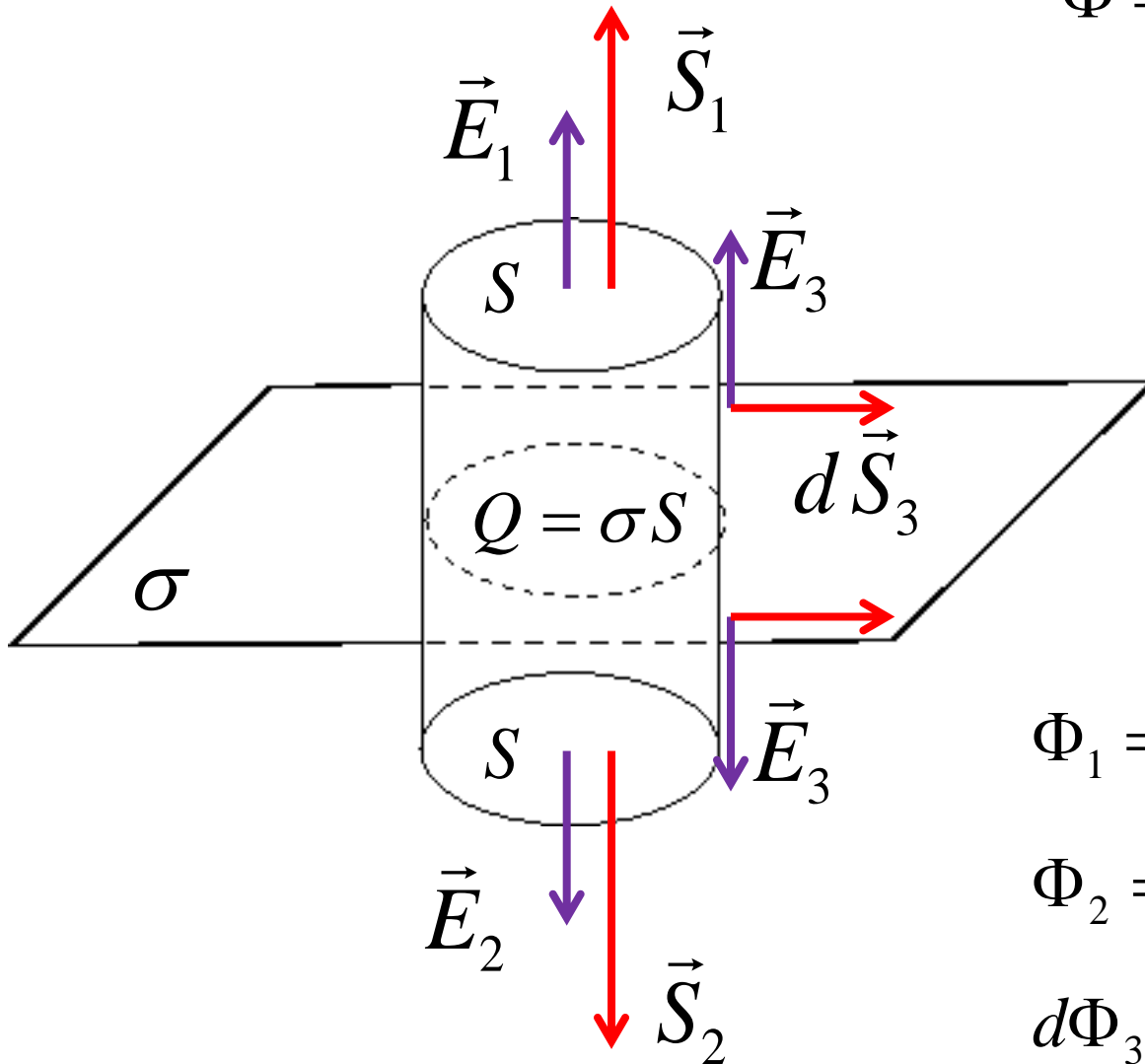
To, że płaszczyzna rozciąga się we wszystkich kierunkach i można nią obracać wokół dowolnej osi prostopadłej do tej płaszczyzny, prowadzi do wniosku, że natężenie pola elektrycznego musi być prostopadłe do powierzchni. Dla dodatniej gęstości powierzchniowej ( $\sigma > 0$ ) wektor natężenia pola elektrycznego jest skierowany od płaszczyzny, a dla ujemnej gęstości powierzchniowej ( $\sigma < 0$ ) wektor natężenia pola elektrycznego jest skierowany do płaszczyzny.

Jak wybrać zamkniętą powierzchnię Gaussa dla tego problemu ?

Bierzemy dowolny graniastosłup o podstawach równoległych do płaszczyzny w taki sposób, by płaszczyzna przecinała go dokładnie w połowie wysokości !

Powierzchnia Gaussa składa się z trzech części: dwóch podstaw graniastopyła i jego powierzchni bocznej. Dlatego całkowity strumień przez powierzchnię zamkniętą jest sumą trzech składników:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$



$$\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 = |\vec{E}_1| |\vec{S}_1| = E S$$

$$\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 = |\vec{E}_2| |\vec{S}_2| = E S$$

$$d\Phi_3 = \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 = 0 \rightarrow \Phi_3 = 0$$

Ładunek jest rozłożony tylko na płaszczyźnie, więc powierzchnia Gaussa zawiera w swoim wnętrzu ładunek  $Q = \sigma S$ .

Korzystając z prawa Gaussa dostajemy:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2SE = 4\pi k \sigma S$$

$$\rightarrow E \equiv |\vec{E}| = 2\pi k \sigma = (SI) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Wynik jest zupełnie niezależny od wysokości graniastostupa, więc natężenie pola elektrycznego byłoby po obu stronach płaszczyzny stałym wektorem prostopadłym do płaszczyzny! O takim polu wektorowym mówimy, że jest jednorodne.

Ten wynik (dla nieskończonej płaszczyzny) jest użyteczny także w przypadku, gdy jesteśmy blisko jednorodnie naładowanej płaskiej powierzchni o skończonych rozmiarach z dala od jej brzegów.

→ kondensator płaski