

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 11

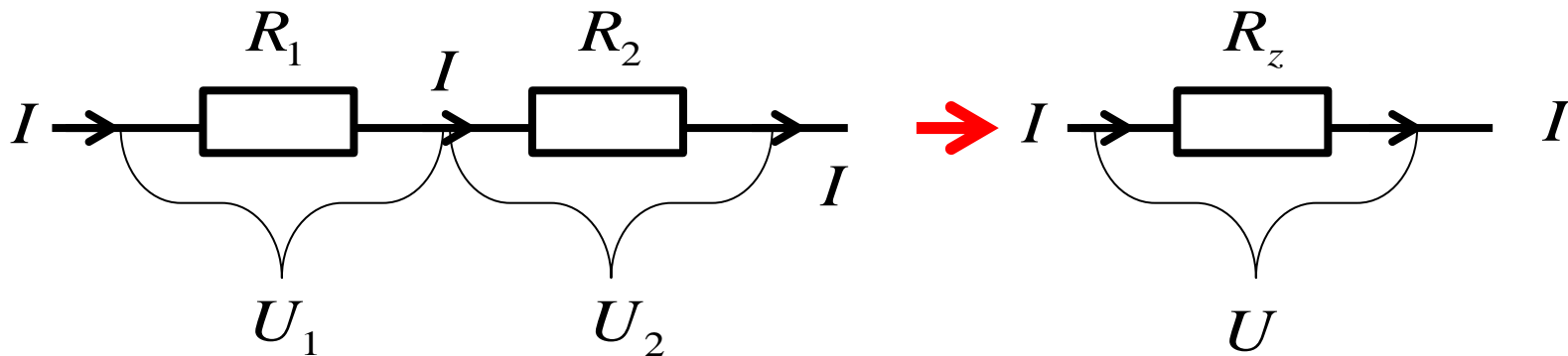
Najważniejsze elementy ostatniego wykładu to

- Dipol elektryczny i jego potencjał elektryczny
- Polaryzacja i dielektryk w polu elektrycznym
- Ładunki związane
- Dielektryki liniowe i przenikalność elektryczna
- Wektor indukcji elektrycznej
- Prawo Gaussa dla wektora indukcji elektrycznej
- Natężenie pola elektrycznego w dielektrykach liniowych
- Gęstość energii pola elektrycznego w materii
- Wektor gęstości prądu elektrycznego
- Natężenie prądu elektrycznego
- Prawo Ohma a definicja oporu elektrycznego

Część rysunków zapożyczyłem z wykładu profesora Reinharda Kulesy.

Łączenie oporników

Łączenie szeregowe:



$$I_1 = I_2 = I$$

$$I R_z = U = U_1 + U_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2)$$

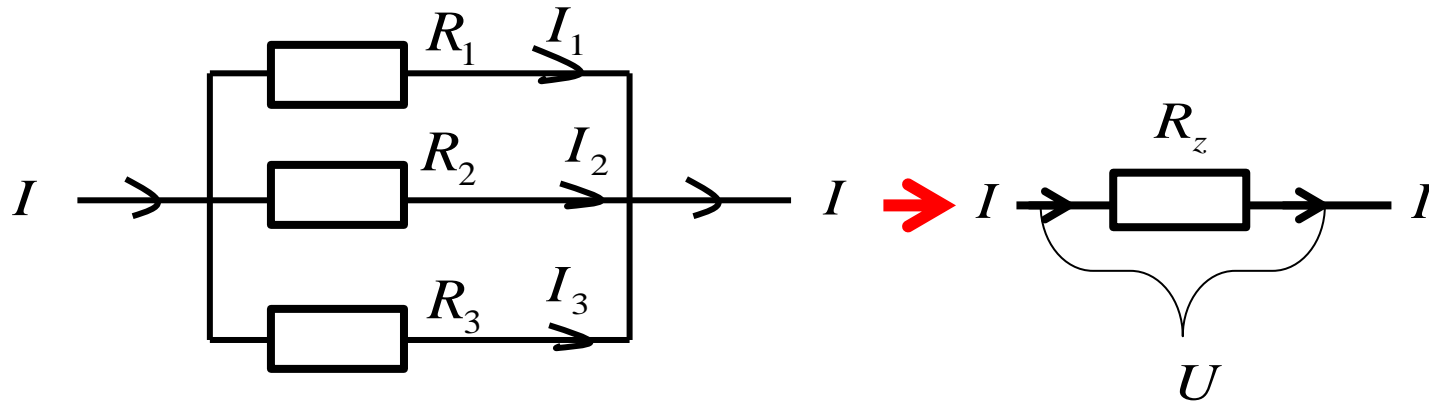
$$\rightarrow R_z = R_1 + R_2$$

W ogólnym przypadku, dla N oporników
połączonych szeregowo

$$R_z = \sum_{i=1}^N R_i$$

Łączenie oporników

Łączenie równoległe



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

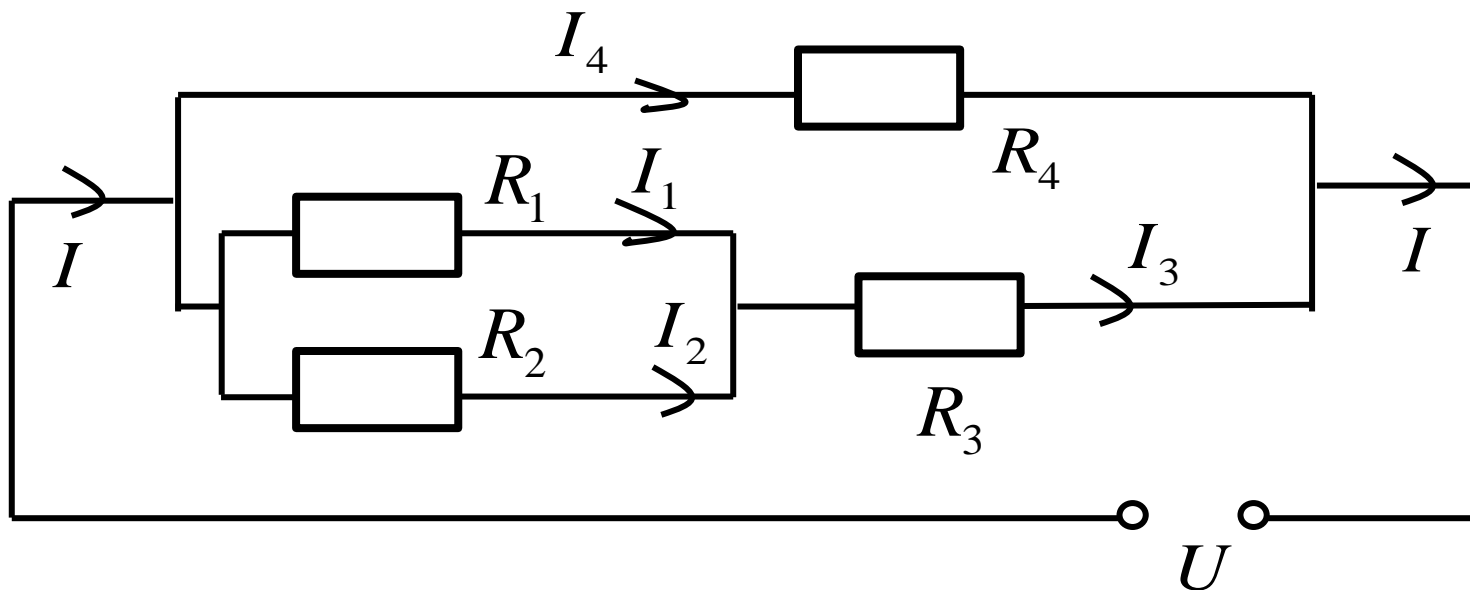
$$I R_z = U = U_1 = U_2 = U_3 = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$$

$$\rightarrow \frac{U}{R_z} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \rightarrow \frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

W ogólnym przypadku, dla N oporników
połączonych równoległe

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Przykład układu oporników, który może zostać zbudowany z kilku połączeń szeregowych i równoległych



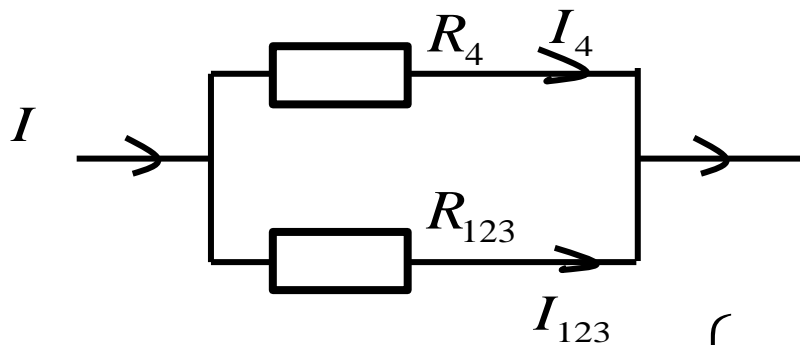
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4}$$

$$\rightarrow R_z = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_4}{R_2 (R_3 + R_4) + R_1 (R_2 + R_3 + R_4)}$$

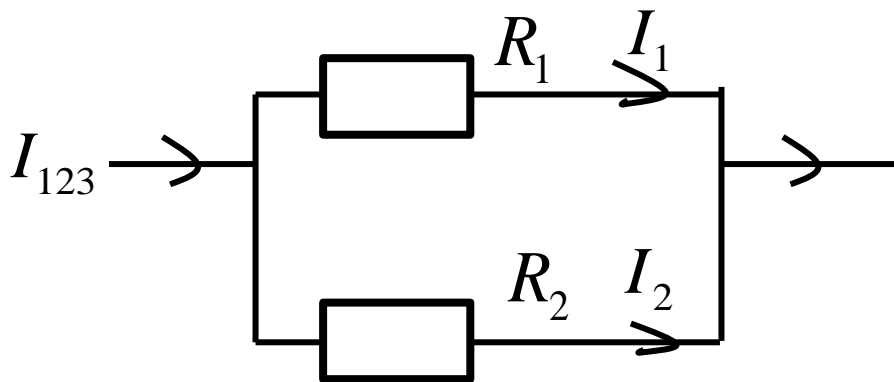
Pełna informacja wymaga także policzenia wszystkich natężeń prądów I_i !



$$I = \frac{U}{R_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} I = I_4 + I_{123} \\ R_4 I_4 = R_{123} I_{123} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} I_4 = \frac{R_{123}}{R_{123} + R_4} I \\ I_{123} = \frac{R_4}{R_{123} + R_4} I \end{cases}$$

Dalej mamy dla dolnej gałęzi:



$$I_3 = I_{123}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 + I_2 = I_{123} \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_{123} \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_{123} \end{cases}$$

Albo prościej, odejmując spadek napięcia na oporniku R_3 :

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = U - R_3 I_3 \rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{U - R_3 I_3}{R_1} \\ I_2 = \frac{U - R_3 I_3}{R_2} \end{cases}$$

W ten sposób mamy policzone już wszystkie natężenia prądu !

Teraz możemy policzyć też moc wydzielaną na każdym oporniku: $P_i = R I_i^2$

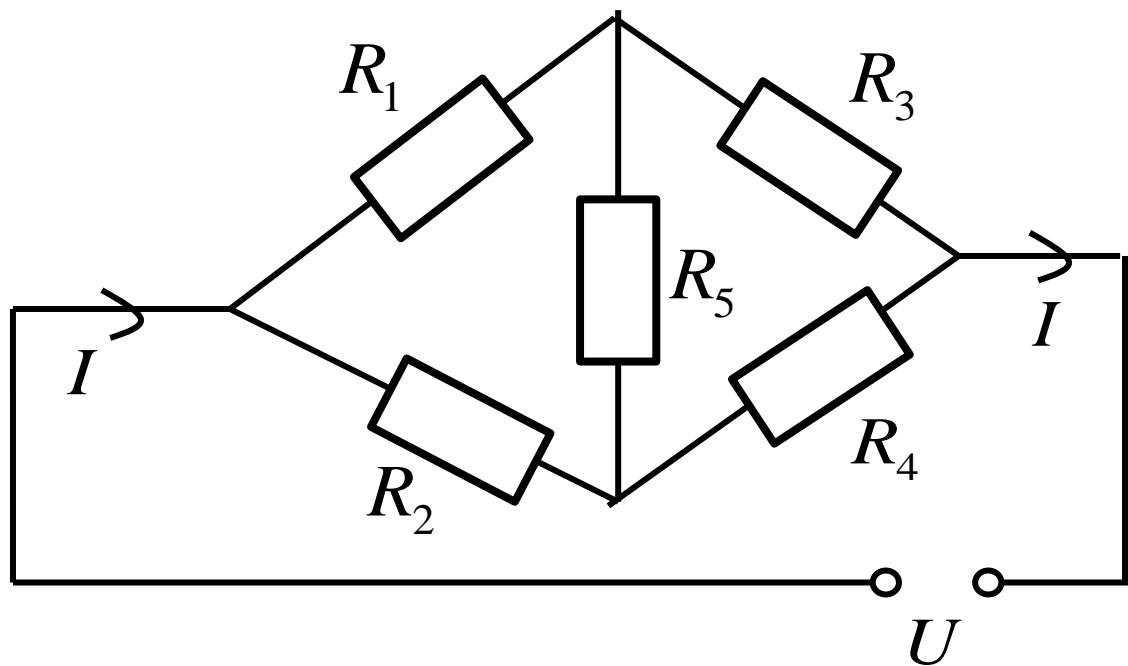
Jeśli pojęcie oporu zastępczego ma sens, musi zachodzić:

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^4 P_i = \sum_{i=1}^4 R_i I_i^2 = R_z I^2$$

całkowita moc
wydzielana w obwodzie

Nie wszystkie układy można sprowadzić do połączeń szeregowych i równoległych !
Klasycznym przykładem jest tzw. „mostek”. W tym przypadku a priori nie wiadomo,
w którą stronę płynie prąd przez opornik R_5 !

Dla takich układów potrzebne są prawa Kirchhoffa, które podamy nieco dalej !



Siła elektromotoryczna (SEM)

Dlaczego możliwy jest w ogóle prąd o stałym natężeniu ?!

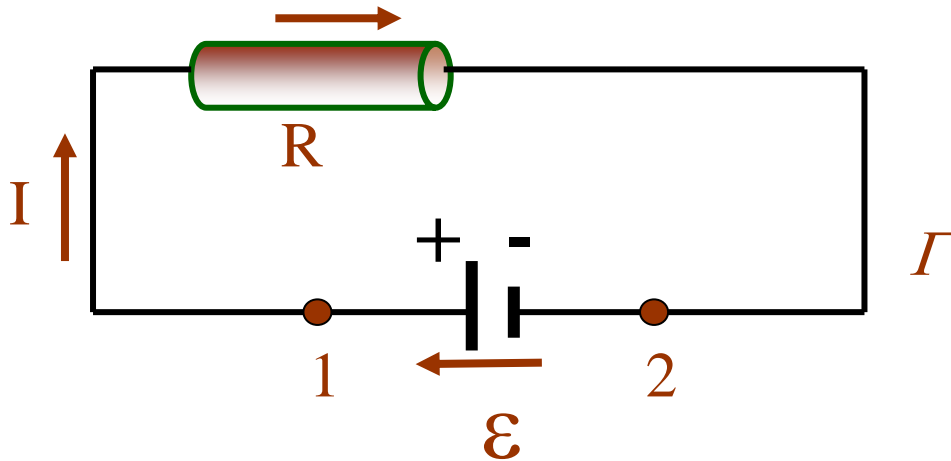
Przy omawianiu prawa Ohma zakładaliśmy, że między końcami rozważanego przewodnika istnieje stała różnica potencjałów. Siły elektrostatyczne zawsze będą dążyły do wyrównania się potencjałów w przewodniku, likwidując tę różnicę. (Przypominam „doświadczenie” z dwoma elektroskopami !)

Utrzymanie różnicy potencjału wymaga istnienia dodatkowych sił zewnętrznych. Muszą one wykonywać pracę związaną z przenoszeniem ładunków.

Te siły zewnętrzne mogą mieć różne przyczyny. Na przykład:

- Procesy chemiczne w bateriach
- Ciśnienie mechaniczne w kryształach piezoelektrycznych
- Różnice temperatur w termoelemencie
- Światło w komórce fotoelektrycznej
- Zmiana strumienia pola magnetycznego

Rozważmy prosty obwód elektryczny : bateria + opornik



W tym obwodzie elektrycznym działają dwie siły podtrzymujące prąd elektryczny: siła źródła fizycznie związana z fragmentem obwodu, gdzie znajduje się bateria oraz siła elektrostatyczna, która „wygładza” przepływ ładunku i przenosi wpływ źródła do wszystkich części obwodu.

$$\vec{E} = \vec{E}_{zew} + \vec{E}_{stat}$$

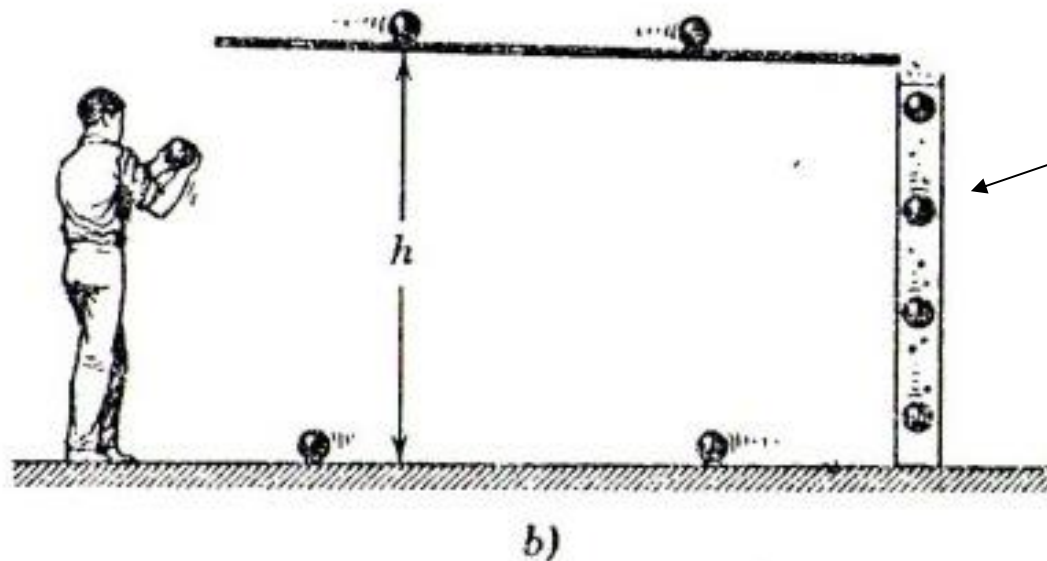
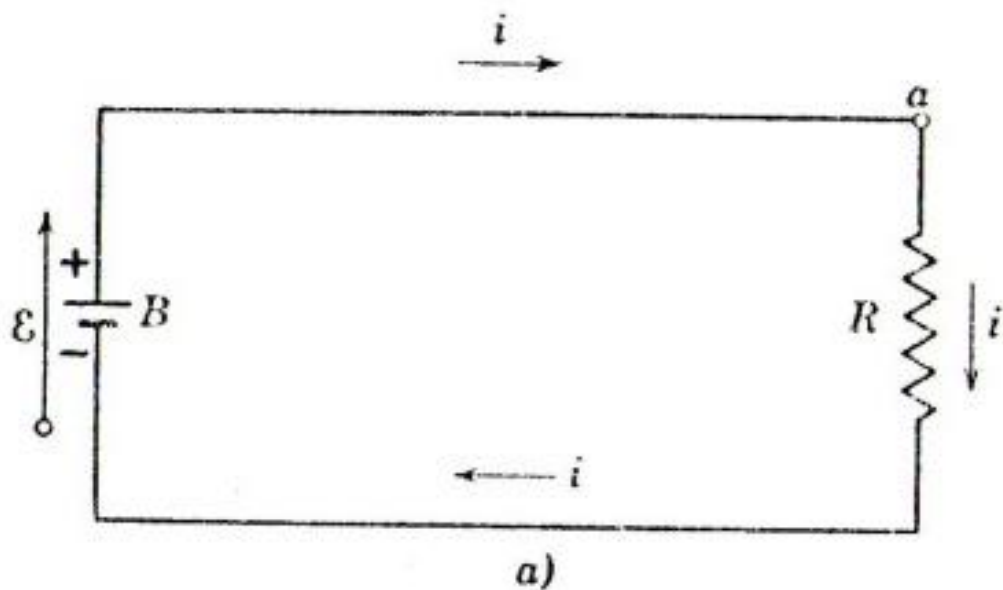
Całka po konturze zamkniętym Γ wynosi

$$W = Q \oint_{\Gamma} \vec{E}_{stat} \cdot d\vec{l} + Q \oint_{\Gamma} \vec{E}_{zew} \cdot d\vec{l}$$

Pierwsza całka znika, więc całka po konturze zamkniętym siły całkowitej albo zewnętrznej, przypadająca na jednostkę ładunku (**siła elektromotoryczna**) wynosi

$$\mathcal{E} = \frac{W}{Q} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{zew} \cdot d\vec{l}$$

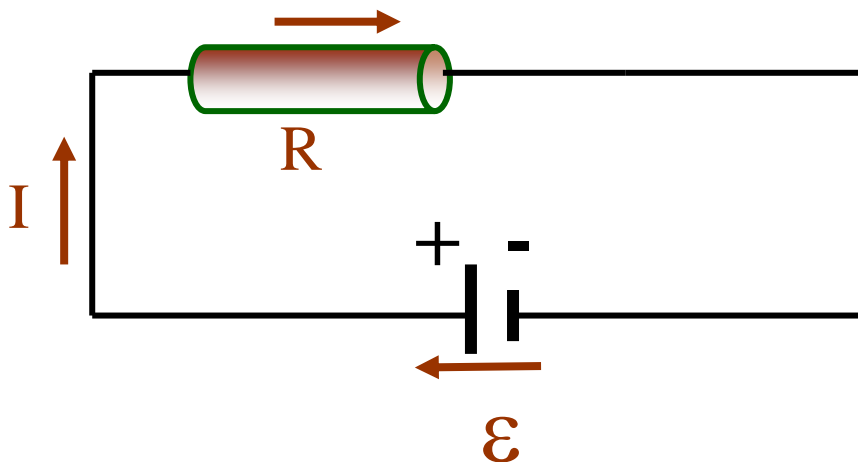
W przypadku zlokalizowanego źródła, można siłę elektromotoryczną interpretować jako pracę wykonaną przez źródło nad jednostkowym ładunkiem.



Podstawowy obwód elektryczny i jego „grawitacyjny” odpowiednik.
 (Rysunki z wcześniejszych wydań podręcznika D. Hallidaya i R. Resnicka)

Po prawej stronie kule spadają w gęstej, lepkiej cieczy i tracą energię

Rysunki z wcześniejszych wydań podręcznika D. Hallidaya i R. Resnicka



Jeśli w obwodzie mamy opory zewnętrzne R_z oraz opór wewnętrzny źródła, R_w , wtedy

$$I(R_z + R_w) = \mathcal{E}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_z + R_w}$$

Spadek napięcia na oporze zewnętrznym wynosi:

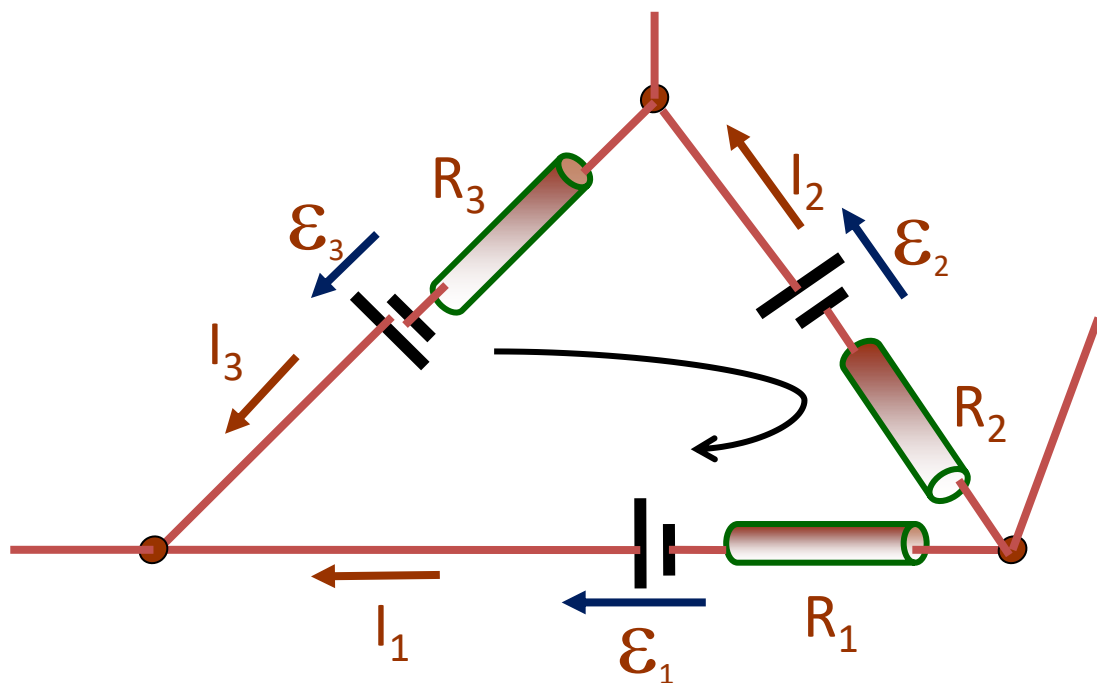
$$U = IR_z = -IR_w + \mathcal{E}$$

Tylko, gdy obwód jest otwarty ($I=0$), mamy: $U = \mathcal{E}$

Jeżeli w obwód byłoby włączonych więcej oporów i sił elektromotorycznych, wtedy zamiast $I(R_z + R_w) = \mathcal{E}$, używamy $\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i$,

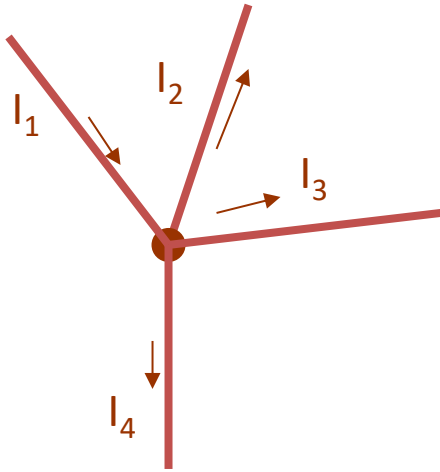
co stanowi treść **II prawa Kirchhoffa dla „oczek” sieci**: w dowolnym oczku suma spadków napięć jest równa sumie sił elektromotorycznych występujących w tym oczku.

Wybieramy kierunek obchodzenia oczka i uważamy na znaki !



$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$$

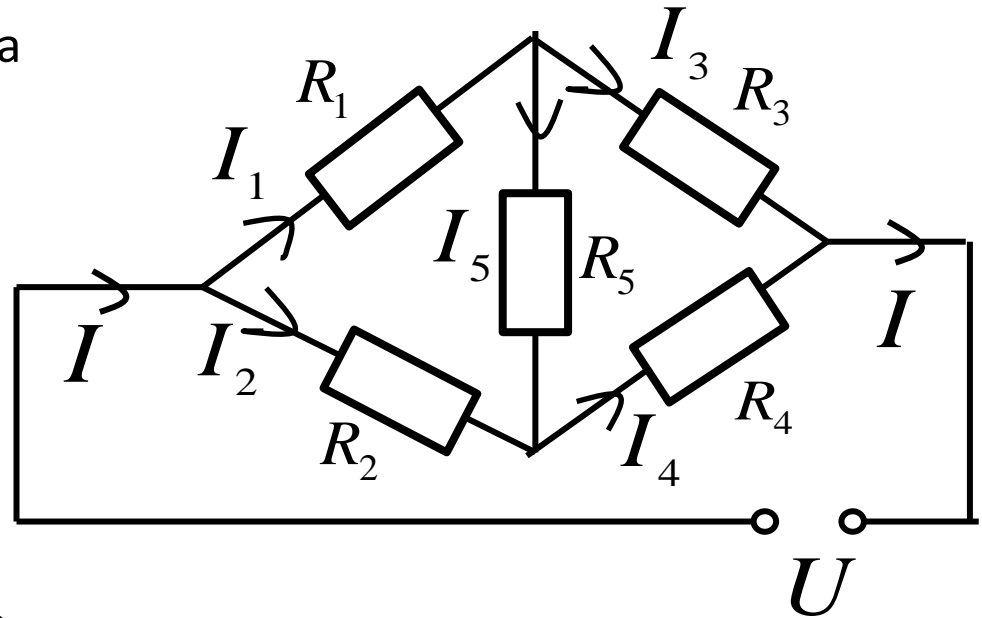
I prawo Kirchhoffa dotyczy „węzłów” sieci wyraża prawo zachowania ładunku: suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających.



$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

Przykład zastosowania praw Kirchhoffa:

Liczmy opór zastępczy dla mostka



$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_5 \\ I_4 = I_2 + I_5 \\ I = I_1 + I_2 \\ \cancel{I = I_3 + I_4} \end{cases}$$

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = 0$$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0$$

$$\cancel{I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0}$$

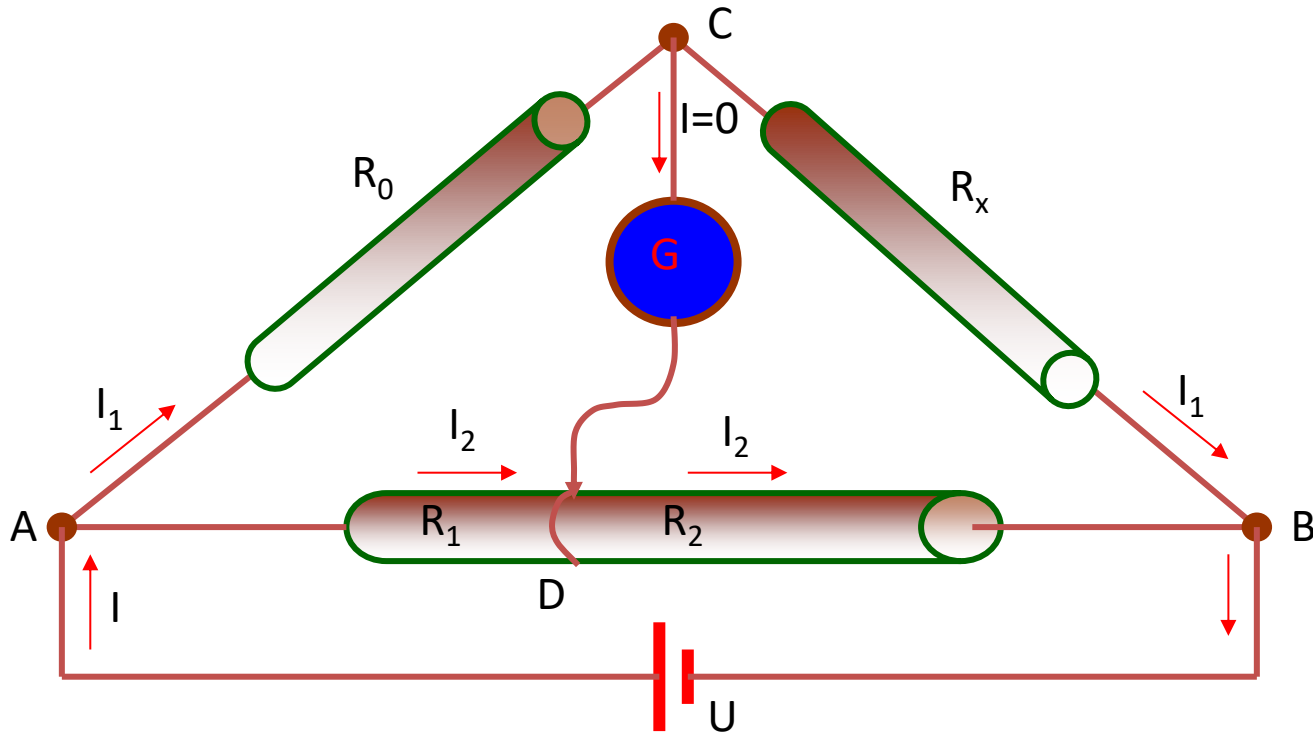
W układzie mamy 4 węzły i 3 oczka, ale nie wszystkie równania są niezależne ! Ostatecznie dostajemy układ 5 równań na 5 niewiadomych I_i

```
s = FullSimplify[Solve[{I1 == I3 + I5, I4 == I2 + I5,
    I0 == I1 + I2, R1 * I1 + R5 * I5 - R2 * I2 == 0, R3 * I3 - R4 * I4 - R5 * I5 == 0},
    {I1, I2, I3, I4, I5}]]
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} I1 &\rightarrow \frac{I0 R2 (R3 + R4) + I0 (R2 + R4) R5}{(R1 + R2) (R3 + R4) + (R1 + R2 + R3 + R4) R5}, \\ I2 &\rightarrow \frac{I0 R1 (R3 + R4) + I0 (R1 + R3) R5}{(R1 + R2) (R3 + R4) + (R1 + R2 + R3 + R4) R5}, \\ I3 &\rightarrow \frac{I0 (R1 + R2) R4 + I0 (R2 + R4) R5}{(R1 + R2) (R3 + R4) + (R1 + R2 + R3 + R4) R5}, \\ I4 &\rightarrow \frac{I0 (R1 + R2) R3 + I0 (R1 + R3) R5}{(R1 + R2) (R3 + R4) + (R1 + R2 + R3 + R4) R5}, \\ I5 &\rightarrow \frac{I0 (R2 R3 - R1 R4)}{(R1 + R2) (R3 + R4) + (R1 + R2 + R3 + R4) R5} \end{aligned} \right\} \right\}$$

Możemy wykorzystać fakt, że $I5$ znika dla $R_2 R_3 = R_1 R_4$ do pomiaru nieznanego oporu \rightarrow mostek Wheatstone'a

Mostek Wheatstone'a



Opór, który chcemy zmierzyć, wpinamy między punkty C i B. R_0 jest znanym oporem. Suwak na oporze AB przesuwamy tak długo, aż w gałęzi CD nie popłynie prąd. Oznacza to :

$$R_1 R_x = R_0 R_2 \rightarrow R_x = R_0 \frac{R_2}{R_1}$$

Po znalezieniu wszystkich natężeń możemy napisać wzór na spadek napięcia przez mostek, wybierając dowolną drogę. Na przykład:

$$I R_z = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

$$\rightarrow R_z = \frac{I_1 R_1 + I_3 R_3}{I}$$

$$R_z = \frac{R_3 R_4 R_5 + R_2 R_3 (R_4 + R_5) + R_1 (R_4 (R_3 + R_5) + R_2 (R_3 + R_4 + R_5))}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) R_5}$$

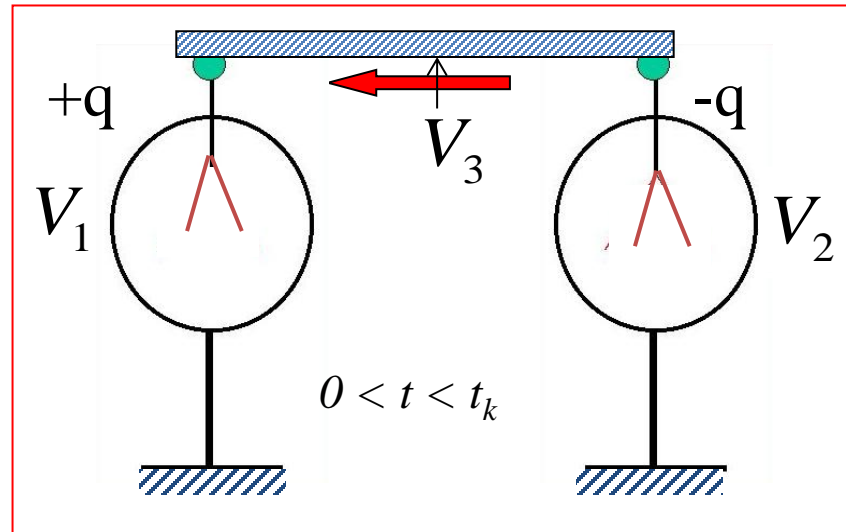
Wynik jest niezależny od I , bo wszystkie natężenia prądu są proporcjonalne do I .

Polecam notebooki, które zawierają szczegółowe wyniki:

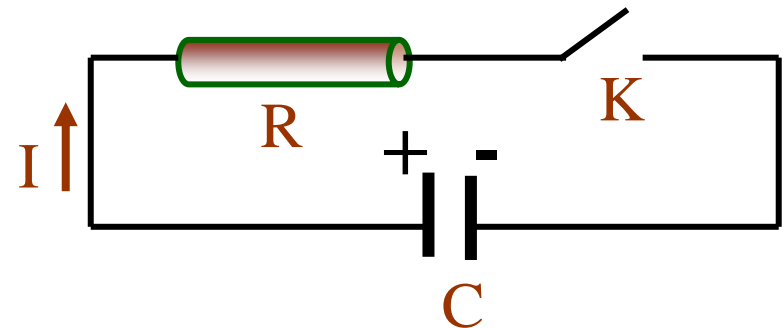
http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/prosty_uklad_opornikow.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/prawa_Kirchhoffa_opor_mostka.nb

Mieliśmy już jeden przykład obwodu, w którym działają wyłącznie siły elektrostatyczne. Rozładowanie elektroskopów rozważyliśmy czysto jakościowo.



Teraz, kiedy znamy już pojęcie natężenia prądu elektrycznego, rozważymy inny prosty układ bez zewnętrznej siły elektromotorycznej, który możemy opisać ilościowo. Wpinamy opornik między okładki naładowanego kondensatora o pojemności C i ładunku początkowym Q_0 .



Jeśli zamkniemy obwód kluczem K, to przez opornik popłynie prąd o natężeniu

$$I = \frac{U_c}{R}$$

Napięcie na kondensatorze U_c zależy od ładunku Q na okładkach kondensatora, a natężenie prądu wynika z ubytku ładunku na okładkach kondensatora

$$U_c = \frac{Q}{C}, \quad I = -\frac{dQ}{dt}$$

Dostajemy więc proste równanie różniczkowe na ładunek kondensatora:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC},$$

które ma rozwiązanie w postaci

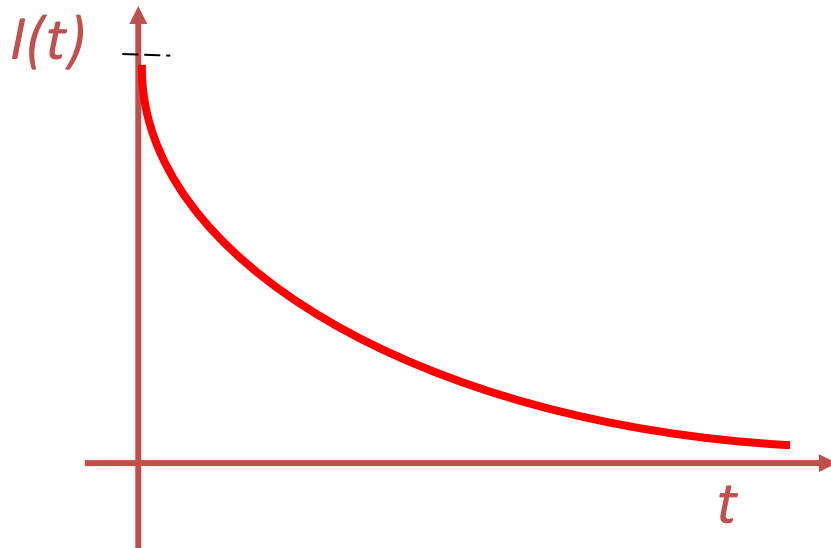
$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

gdzie $Q_0 = Q(t=0)$.

Iloczyn RC ma wymiar czasu i jest nazywany czasem relaksacji.

$$I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Ładunek na kondensatorze zanika eksponencjalnie, a natężenie prądu jest do niego proporcjonalne.



Jaki jest czas rozładowania kondensatora ?

Przyjmując $R= 1 \Omega$ oraz $C= 1\mu\text{F}$, widzimy, że $1/RC$ jest równe 10^6 s^{-1} . Wynika z tego, że natężenie prądu zanika w ułamku sekundy.

Pole magnetyczne

przypomnienie: **Pole elektryczne**: na ładunek elektryczny spoczywający w punkcie $P(x,y,z)$ działa siła proporcjonalna do ładunku. Iloraz siły i ładunku daje wektor natężenia pola elektrycznego \mathbf{E}

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q} \leftrightarrow \vec{F}(x, y, z) = q\vec{E}(x, y, z)$$

Oprócz pola elektrycznego może istnieć także **pole magnetyczne** scharakteryzowane wektorem indukcji magnetycznej \mathbf{B} o tej własności, że na ładunek elektryczny poruszający się z prędkością \mathbf{v} działa w punkcie $P(x,y,z)$ siła dana wzorem

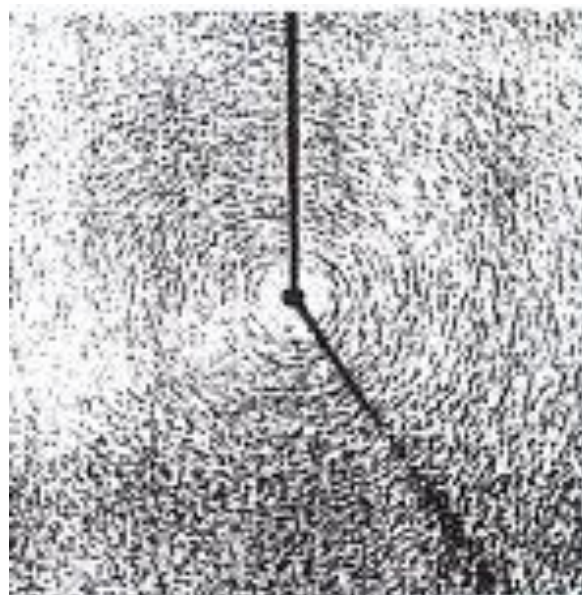
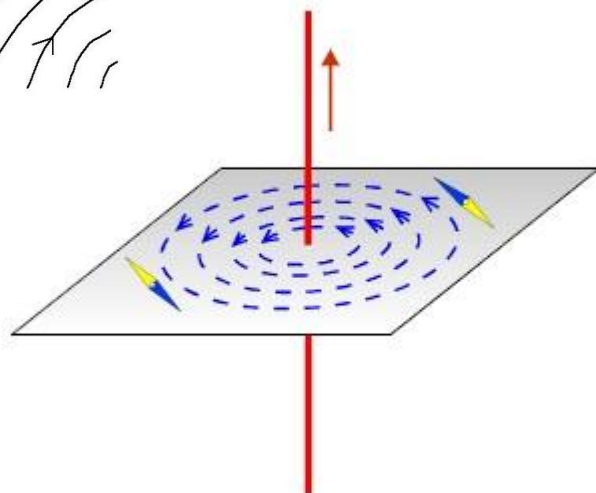
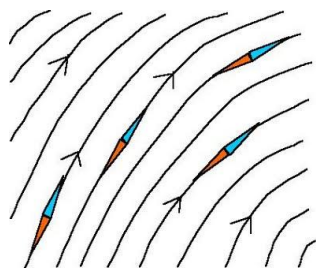
$$\vec{F}(x, y, z) = q(\vec{v} \times \vec{B}(x, y, z)) \quad \text{siła Lorentza}$$

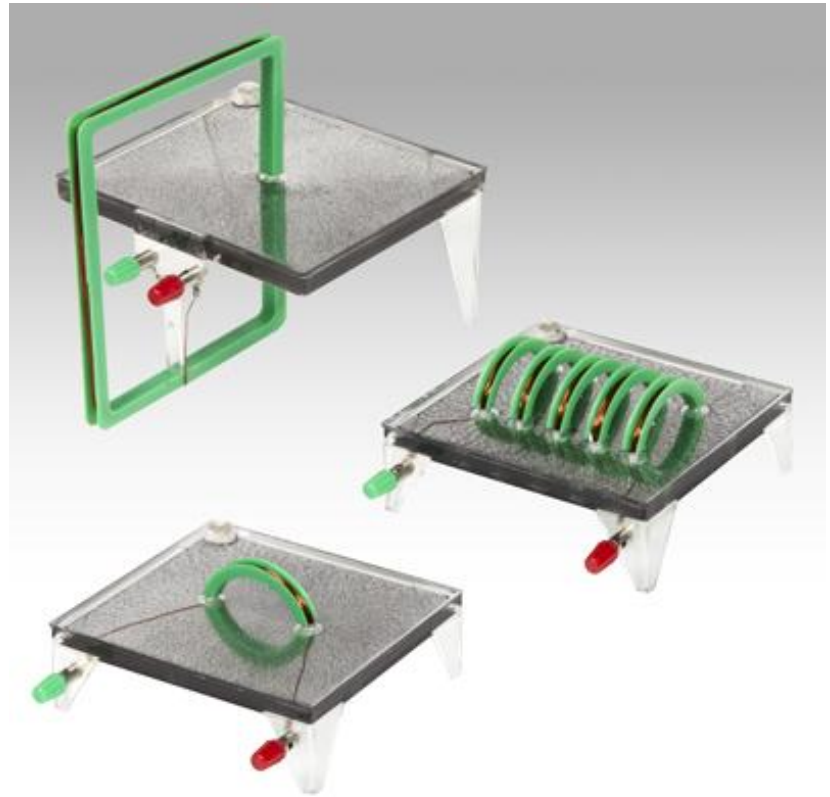
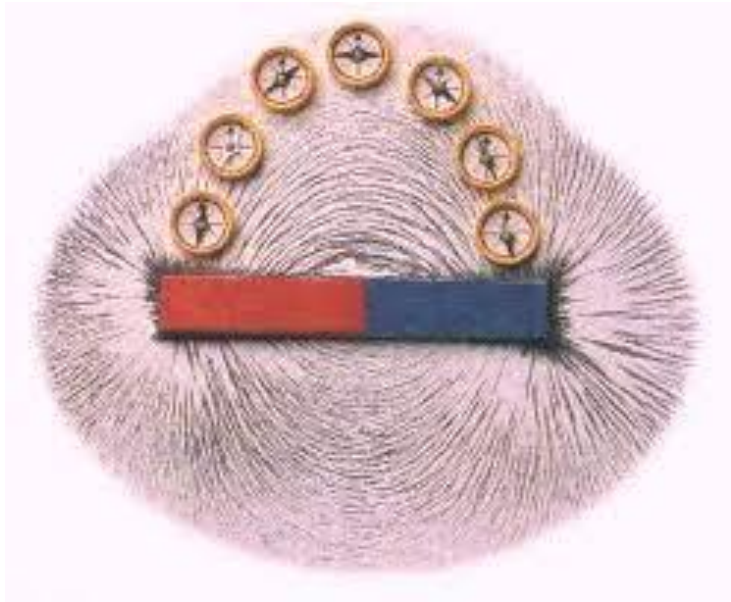
Jednostką indukcji magnetycznej w układzie SI jest tesla (T)

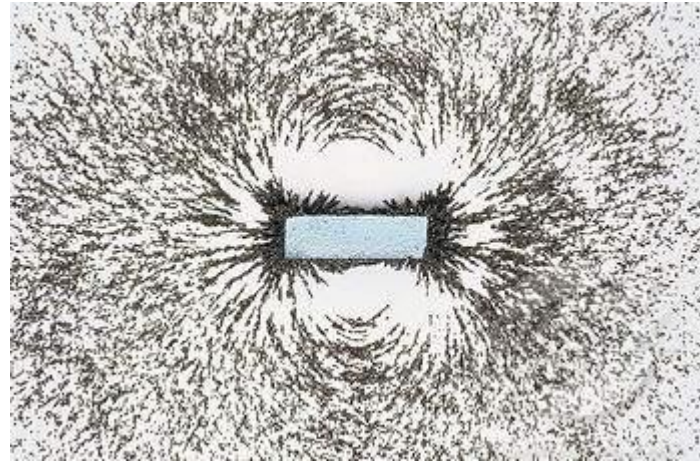
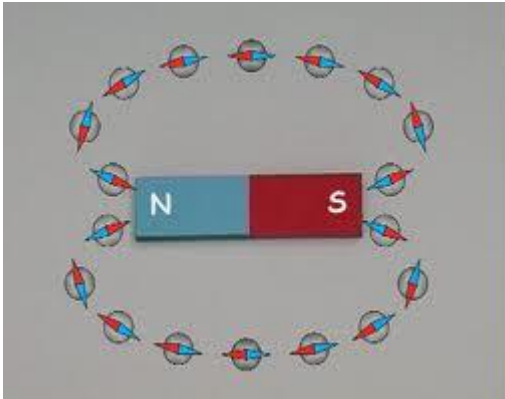
$$[B] = \frac{Ns}{Cm} \equiv T = \frac{Vs}{m^2}$$

Fakty doświadczalne

Pole magnetyczne wytwarzane jest przez magnesy stałe oraz przewodniki z prądem. Do badania pola magnetycznego można użyć kompasu lub opiłków żelaza, przyjmując, że igła magnetyczna i opiłki ustawiają się zgodnie z lokalnym kierunkiem pola magnetycznego.



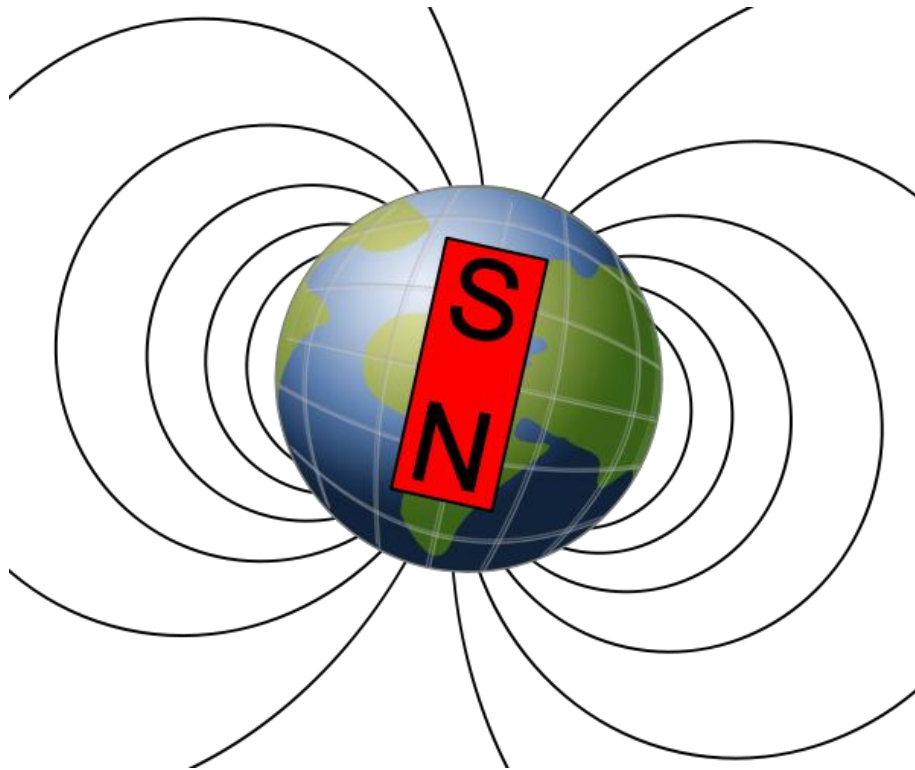




Linie pola magnetycznego są zamknięte !

Nie tylko magnesy stałe, ale także sama Ziemia i przewodniki z prądem są źródłami pola magnetycznego.

Sama Ziemia wytwarza pole magnetyczne !



obrazek
z Wikipedii

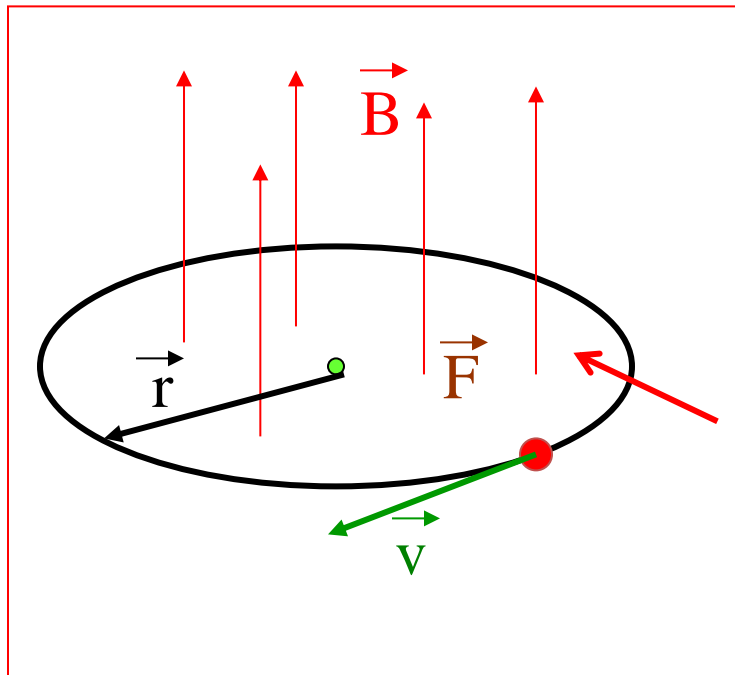
Pole magnetyczne Ziemi przypomina pole magnesu sztabkowego, ale biegun magnetyczny północny jest w pobliżu geograficznego bieguna południowego i odwrotnie !

Linia łącząca bieguny magnetyczne nie pokrywa się z osią obrotu Ziemi (między nimi jest kąt około 10 stopni). Wartość ziemskiego pola magnetycznego przy powierzchni Ziemi to kilkadziesiąt (30-60) mikrotesli.

Pole magnetyczne Ziemi zmieniało się i wciąż zmienia się w czasie !

Konsekwencje wzoru na siłę Lorentza: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

- (1) Siła magnetyczna nie wykonuje pracy; nie można użyć siły Lorentza do przyspieszania cząstek. Pole magnetyczne zmienia kierunek wektora prędkości. W szczególności, jeśli cząstka porusza się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora \mathbf{B} , to siła magnetyczna pełni rolę siły dośrodkowej, przy czym promień dany jest wzorem



$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

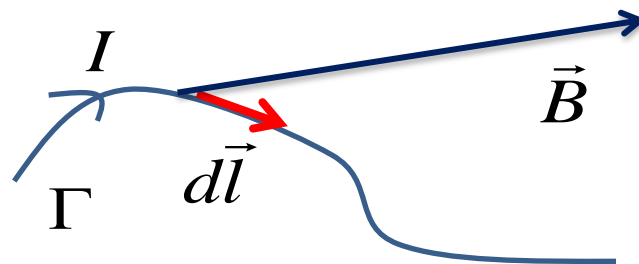
Detektory cząstek:

Jeśli znamy ładunek cząstki i promień r ,
to możemy wyznaczyć pęd cząstki p !

Konsekwencje wzoru na siłę Lorentza: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

(2) Można z wzoru Lorentza wyprowadzić wzór na siłę działającą na odcinek przewodnika z prądem

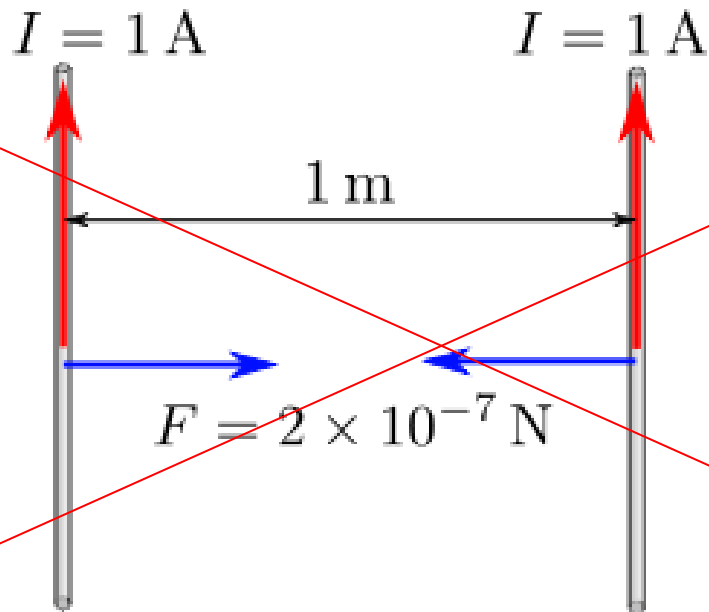
$$\vec{F} = \int_{\Gamma} dq(\vec{v} \times \vec{B}) = \int_{\Gamma} Idt \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right) = I \int_{\Gamma} (d\vec{l} \times \vec{B})$$



Przypomnienie

W poprzedniej wersji układu SI to jednostka natężenia prądu (amper) była jednostką podstawową, zdefiniowaną w oparciu o siłę magnetyczną !

~~Amper jest natężeniem stałego prądu płynącego przez dwa równoległe nieskończenie długie przewodniki z prądem o znikomo małym przekroju kołowym, które są w odległości jednego metra i powodującym, że na każdy metr przewodnika działa siła 2×10^{-7} N.~~



obrazek
z Wikipedii

Ponieważ zaczęliśmy od elektrostatyki, gdzie od początku mieliśmy do czynienia z ładunkiem elektrycznym, bardziej naturalne wydają się **najnowsze regulacje obowiązujące od 19 maja 2019 roku**.

Według nich amper jest zdefiniowany poprzez przyjęcie ustalonej wartości liczbowej ładunku elementarnego e , wynoszącej $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$, wyrażonej w jednostce C (kulombie), która jest równa $C=A*s$, gdzie sekunda zdefiniowana jest za pomocą tzw. częstotliwości cezowej $\Delta\nu_{Cs}$, to jest częstotliwości nadsubtelnego przejścia w atomach cezu 133 w niezaburzonym stanie podstawowym, wynoszącej 9 192 631 770, wyrażonej w jednostce Hz, która jest równa s^{-1} .

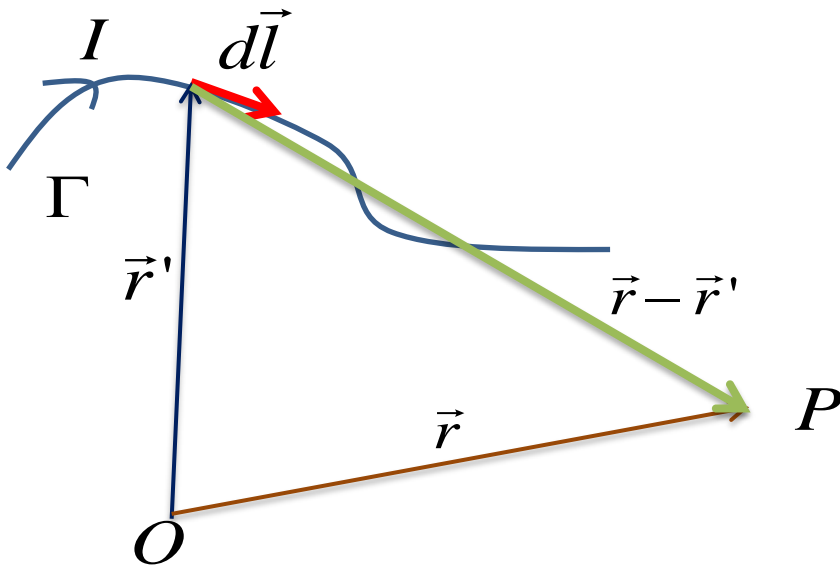
Mówiąc „po ludzku”:

$$A = \frac{C}{s}$$

Jak liczyć indukcję pola magnetycznego ?

Mówi o tym **prawo Biota-Savarta**: indukcja magnetyczna liniowego prądu stałego (płynącego w cienkim przewodniku) w postaci konturu Γ liczona w punkcie P wynosi

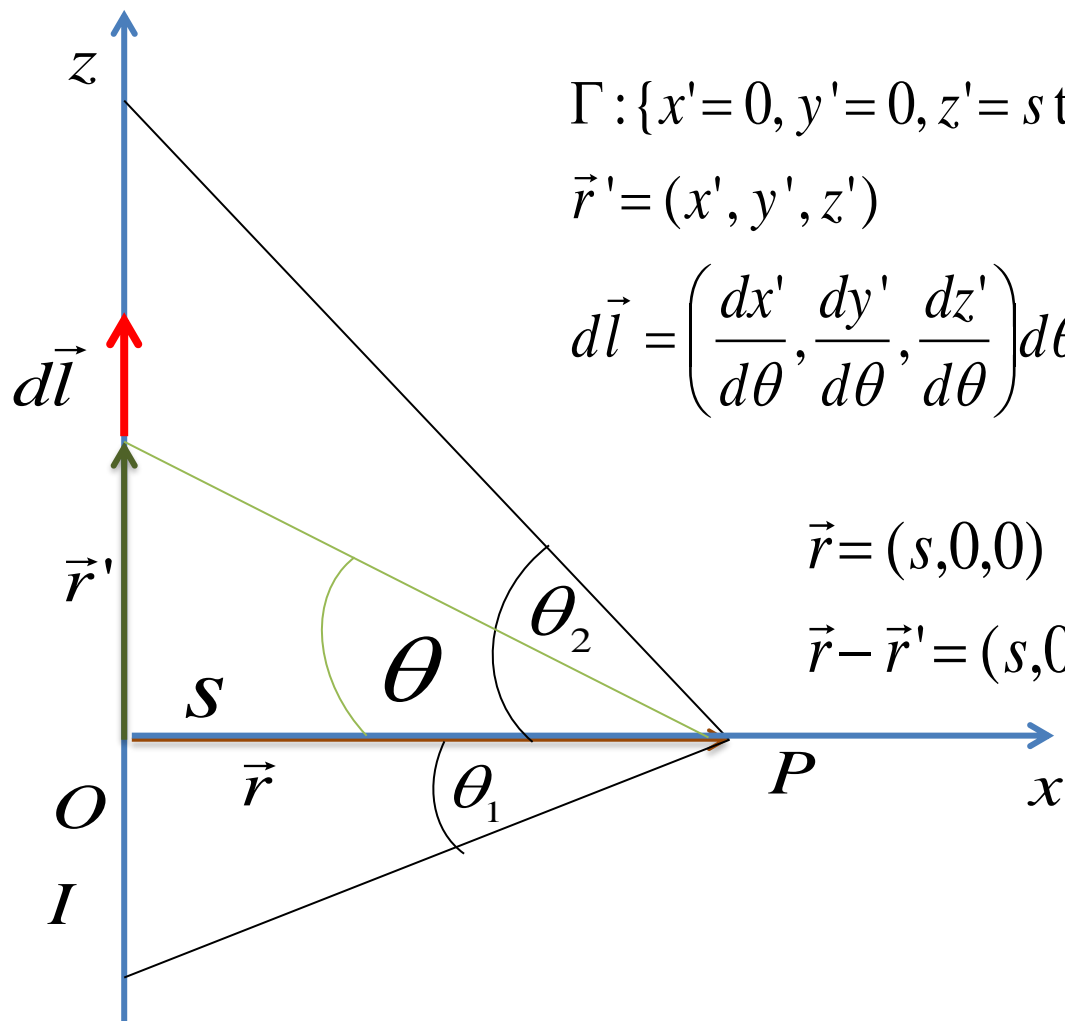
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



μ_0 to przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Ważny przykład: fragment prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu I . Wybieramy układ współrzędnych tak, by przewodnik leżał na osi z . Indukcję magnetyczną wyznaczamy w odległości s od przewodnika.



$$\Gamma : \{x' = 0, y' = 0, z' = s \tan \theta, \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$$

$$\vec{r}' = (x', y', z')$$

$$d\vec{l} = \left(\frac{dx'}{d\theta}, \frac{dy'}{d\theta}, \frac{dz'}{d\theta} \right) d\theta = \left(0, 0, \frac{s}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

$$\vec{r} = (s, 0, 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (s, 0, -s \tan \theta)$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{s^2}{\cos^2 \theta} (0, 1, 0) d\theta$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{s}{\cos \theta}$$

$$B_y(s, 0, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{s^2}{\cos^2 \theta} \left(\frac{s}{\cos \theta} \right)^{-3} d\theta$$

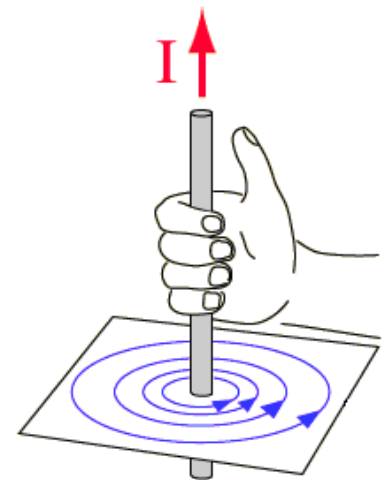
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{s} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

Dla nieskończonego prostoliniowego przewodnika mamy

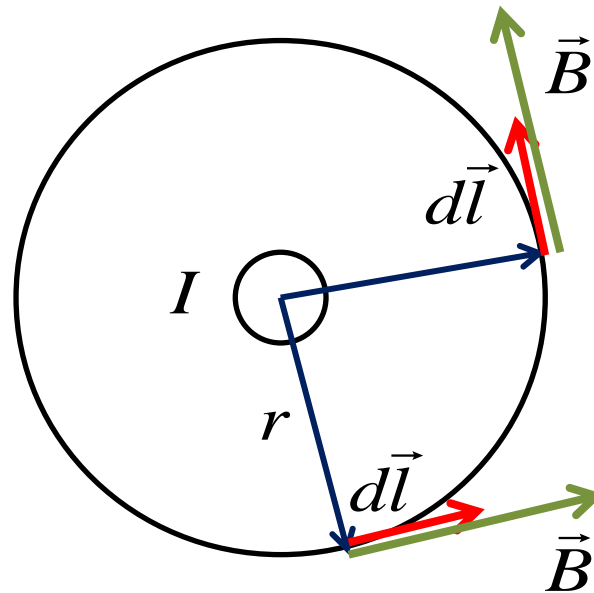
$$\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$B_y(s, 0, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Pole \mathbf{B} ma tylko składową w kierunku osi y



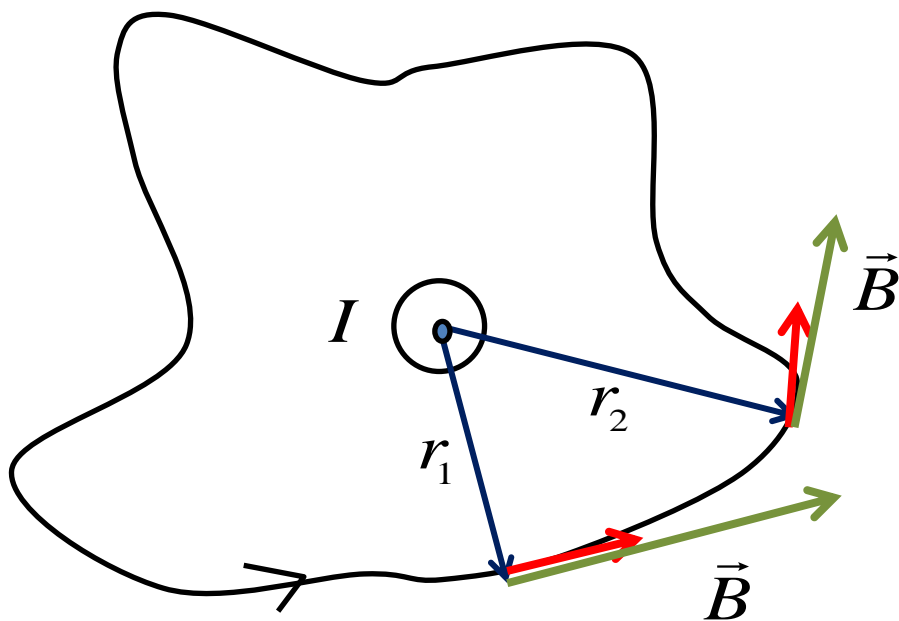
Policzymy teraz krążenie pola \vec{B} po okręgu o promieniu r , który leży w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika i ma środek na przewodniku



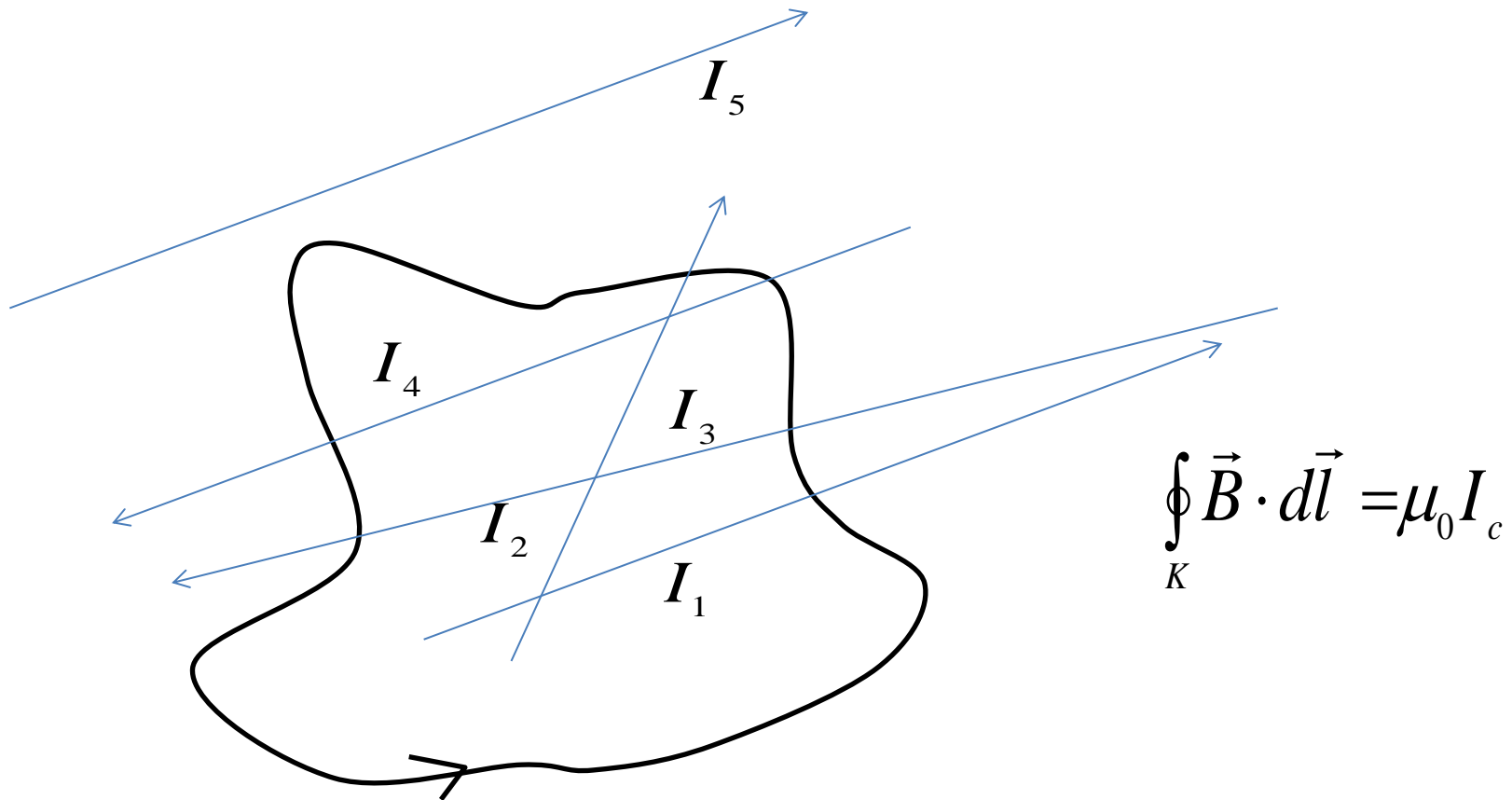
$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_K dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Wynik nie zależy od promienia r

Ze względu na to, że pole \vec{B} ma tylko składową transwersalną i zmienia się jak $1/r$ z odległością od przewodnika z prądem, wynik nie zależy od kształtu konturu K !



$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



Dalsze uogólnienia są możliwe:

Możemy rozważyć wiązkę przewodów prostoliniowych, w których płyną prądy o różnych natężeniach. Każdy przewód otaczany przez kontur K daje wkład do krążenia pola \mathbf{B} . Przewodnik, którego kontur nie obejmuje, nie daje żadnego wkładu.

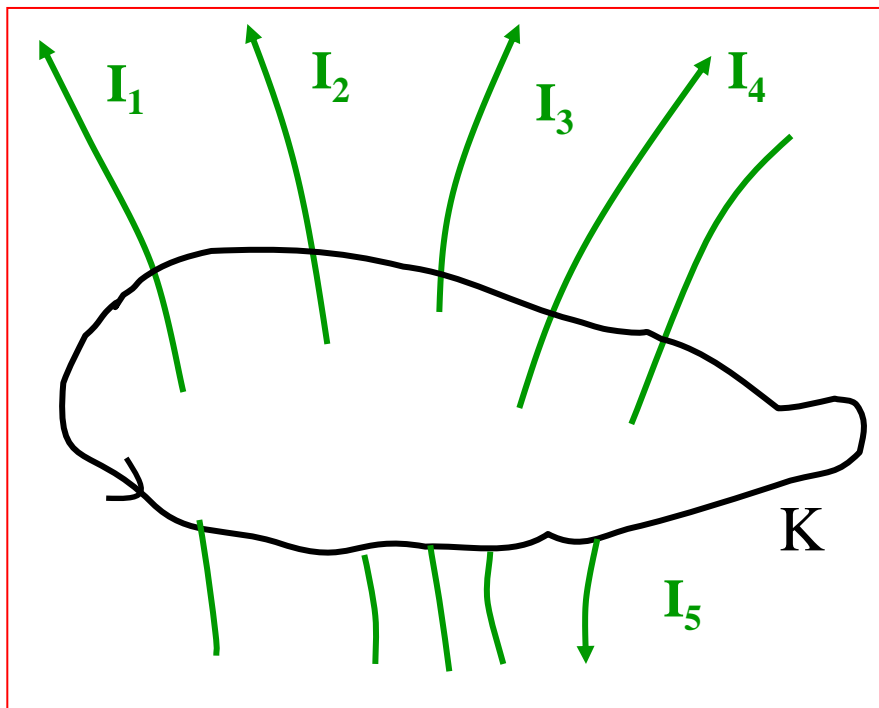
Teraz bierzemy wzór

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$$

i przekształcamy go, korzystając z twierdzenia Stokes'a na całkę po powierzchni S rozpiętej na konturze oraz zapisując całkowity prąd I_c w postaci całki z gęstości prądu.

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Ten wzór jest słuszny ogólnie, chociaż rozważaliśmy tylko nieskończenie długie prostoliniowe przewodniki z prądem !



Uwaga:
W sytuacji przedstawionej na
rysunku znak I_5 jest ujemny !

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_n I_n$$

Prawo Ampere'a w postaci całkowej
oraz
prawo Ampere'a w postaci różniczkowej

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Słuszne dla prądów stałych !

Z ogólniejszej formy prawa Biota-Savarta, w której startujemy z bardziej realistycznych prądów objętościowych, wynika druga para ważnych wzorów:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Całkowity strumień indukcji magnetycznej po dowolnej powierzchni zamkniętej wynosi zero !

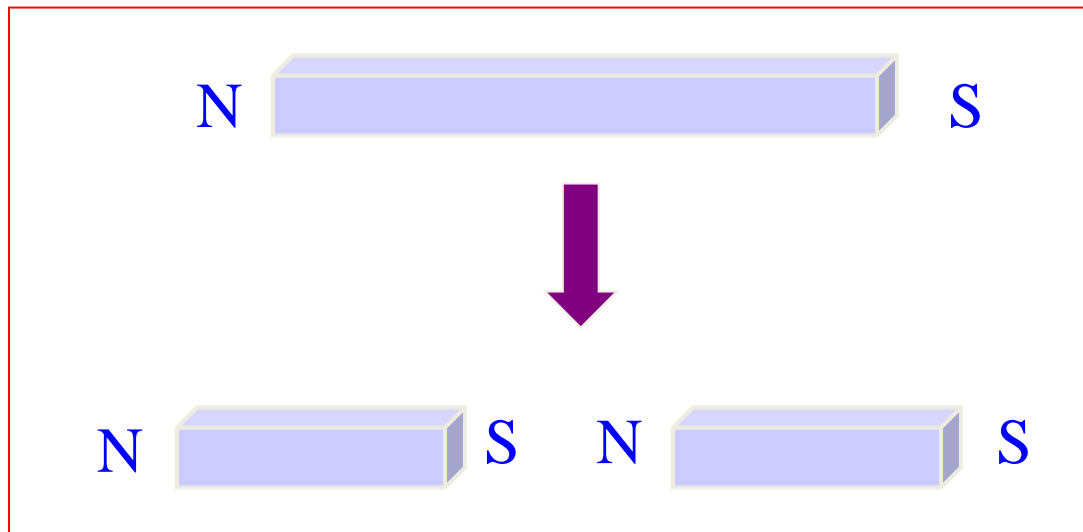
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Dywergencja indukcji magnetycznej wynosi zero ! Pole magnetyczne jest bezźródłowe !

Dla natężenia pola elektrycznego mieliśmy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Linie pola elektrostatycznego zaczynają się na dodatnich ładunkach, a kończą na ładunkach ujemnych. Linie pola magnetycznego nigdzie się nie zaczynają i nigdzie się nie kończą. Nie istnieją punktowe źródła dla indukcji magnetycznej !

W szczególności przetamując magnes sztabkowy nie dostaniemy osobnych kawałków z biegunem północnym i południowym 😊



Potencjał wektorowy

W elektrostatyce mieliśmy znikanie rotacji natężenia pola elektrycznego

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$$

więc mogliśmy wprowadzić potencjał skalarny taki, że

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

Zachodzi bowiem dla dowolnego pola skalarne $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$.
(Rotacja z gradientu wynosi zero.)

W magnetostatyce mamy z kolei

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

więc możemy skorzystać z twierdzenia (dywergencja z rotacji wynosi zero)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

Wprowadzamy **potencjał wektorowy** o tej własności, że

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Zachodzi wtedy

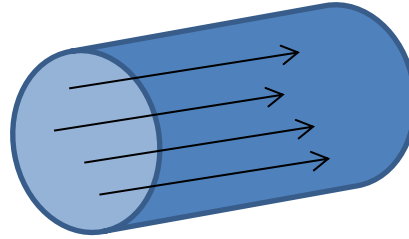
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \left(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_0 \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j},$$

czyli dostajemy jakby trzy (bo trzy składowe) równania Poissona !

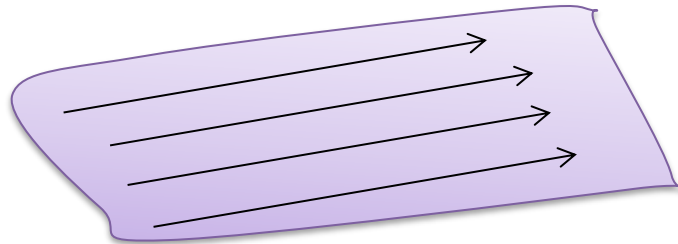
Przez analogię z elektrostatyką możemy podać rozwiązania w postaci

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$



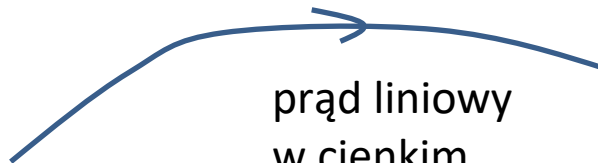
prąd objętościowy, na przykład w grubym realistycznym przewodzie

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$



prąd powierzchniowy

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



prąd liniowy w cienkim przewodniku

Te wzory mają zastosowanie dla prądów znikających w nieskończoności, czyli ograniczonych przestrzennie.

Odpowiedniki !

Elektrostatyka

Prawo Coulomba

Prawo Gaussa

Symetria pozwala na wykorzystanie prawa Gaussa w następujących przypadkach:

- nieskończona jednorodnie naładowana powierzchniowo płaszczyzna
- jednorodnie naładowany walec (powierzchnia boczna walca, nie)
- Jednorodnie naładowana kula (sfera)

Magnetostatyka

Prawo Biota-Savarta

Prawo Ampere'a

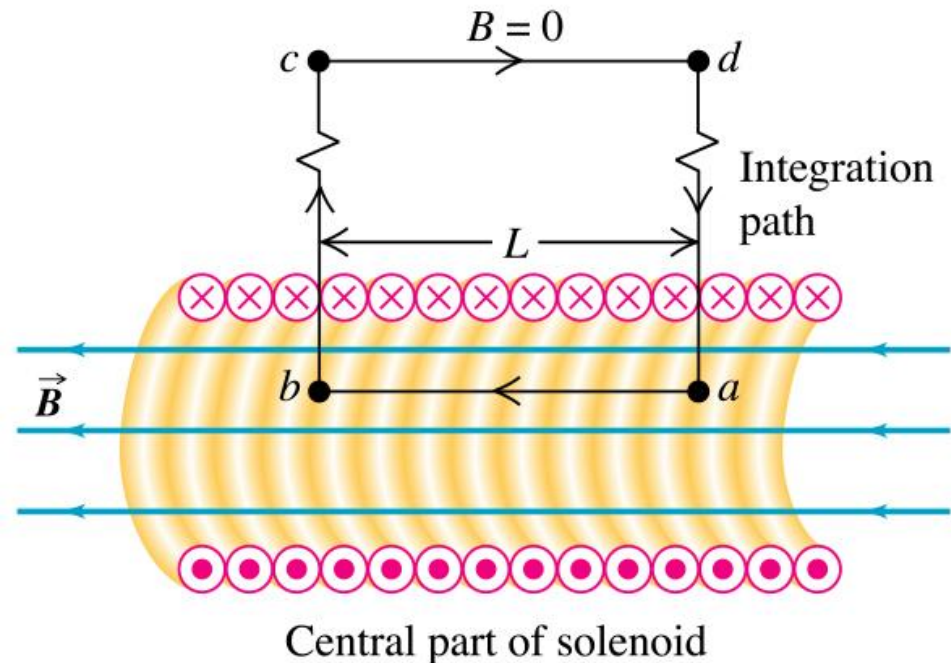
Tak, jak prawo Coulomba: zawsze prawdziwe, ale nie zawsze przydatne do wyznaczenia indukcji magnetycznej !

Symetria pozwala na wykorzystanie prawa Ampere'a w następujących przypadkach:

- nieskończone prostoliniowe przewodniki z prądem (grube i cienkie)
- nieskończone płaszczyzny z prądem
- nieskończone solenoidy
- torusy

Szczególnie ważnym przypadkiem wykorzystania prawa Ampere'a jest obliczenie indukcji magnetycznej (nieskończenie długiego) solenoidu w kształcie walca, na który ciasno nawinięto przewodnik z prądem. Taki solenoid jest odpowiednikiem kondensatora płaskiego w elektrostatyce i służy do wytworzenia jednorodnego pola magnetycznego ! W praktyce pole jest jednorodne nawet dla solenoidu o skończonej długości, jeśli jesteśmy z dala od jego końców.

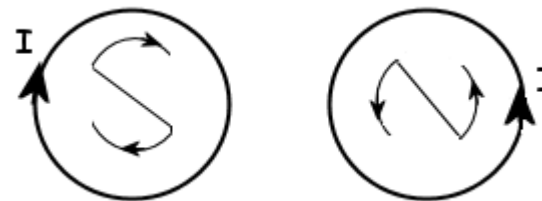
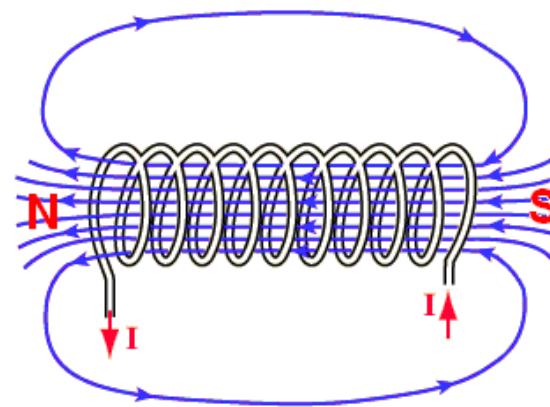
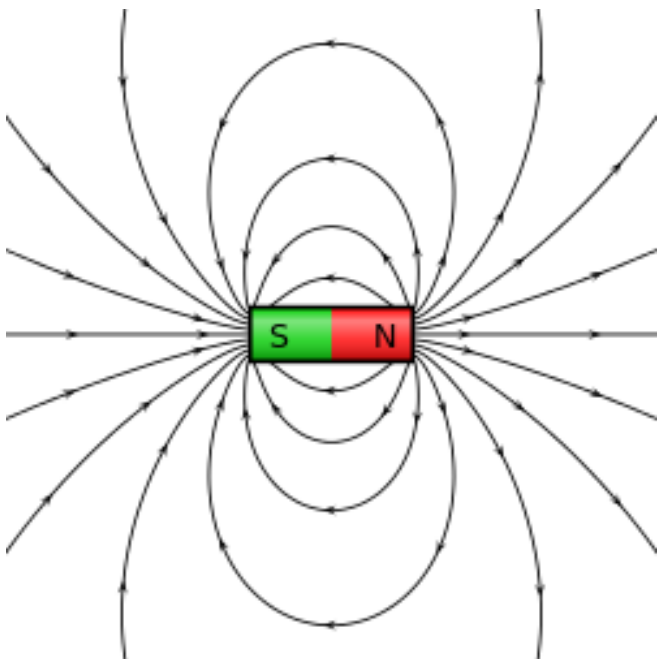
Prąd płynie po okręgach leżących w płaszczyznach prostopadłych do osi solenoidu. Kontur całkowania stanowią boki prostokąta abcd. Pole \vec{B} jest równoległe do osi solenoidu i znika poza solenoidem, więc



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 I_c = \mu_0 nIL \rightarrow B = \mu_0 nI$$

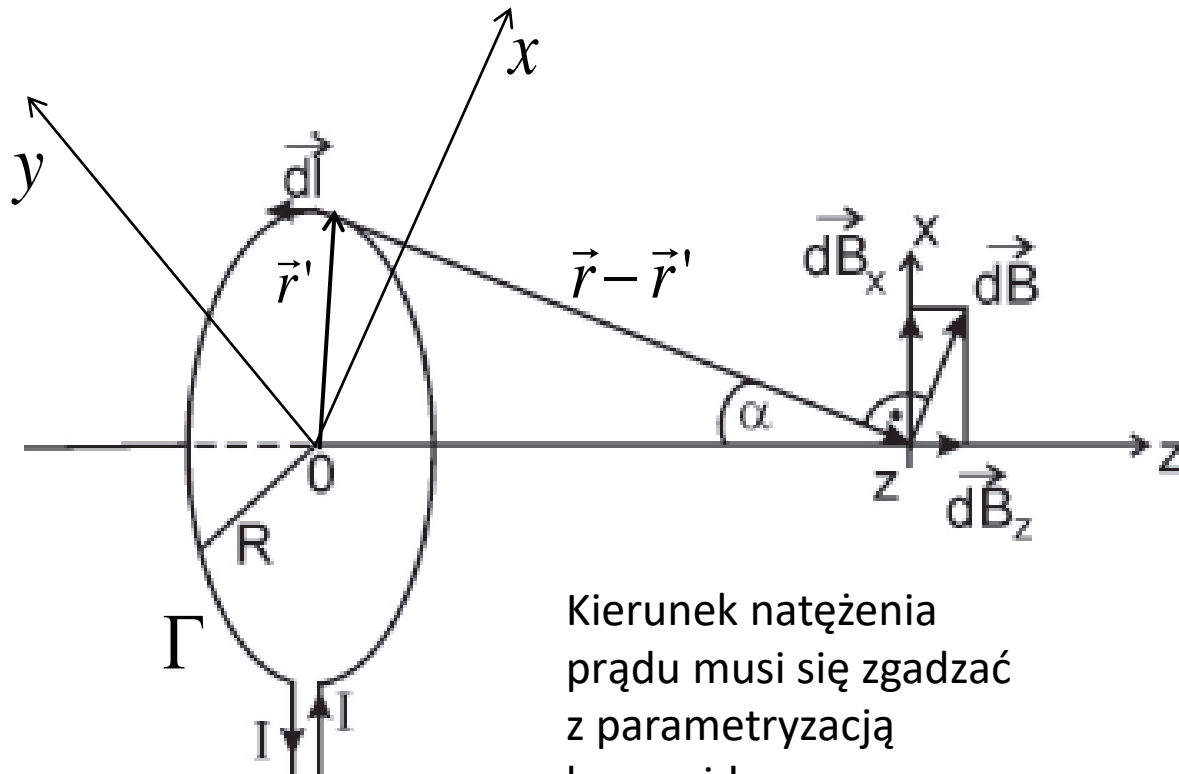
n jest liczbą zwojów na jednostkę długości



Pole skończonego solenoidu jest bardziej skomplikowane

Zastosujemy teraz prawo Biota-Savarta do policzenia indukcji magnetycznej pochodzącej od kołowej pętli i promieniu R z prądem o natężeniu I , leżącej w płaszczyźnie xy i mającej środek w początku układu współrzędnych. Pole \mathbf{B} policzymy za osi z (bo tylko w tych punktach dostaniemy wynik analityczny 😊)

$$\Gamma : \{x' = R \cos \theta, y' = R \sin \theta, z' = 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$$



Kierunek natężenia prądu musi się zgadzać z parametryzacją krzywej !

$$\vec{r}' = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

$$d\vec{l} = \left(\frac{dx'}{d\theta}, \frac{dy'}{d\theta}, \frac{dz'}{d\theta} \right) d\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta$$

$$\vec{r} = (0, 0, z)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-R \cos \theta, -R \sin \theta, z) \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

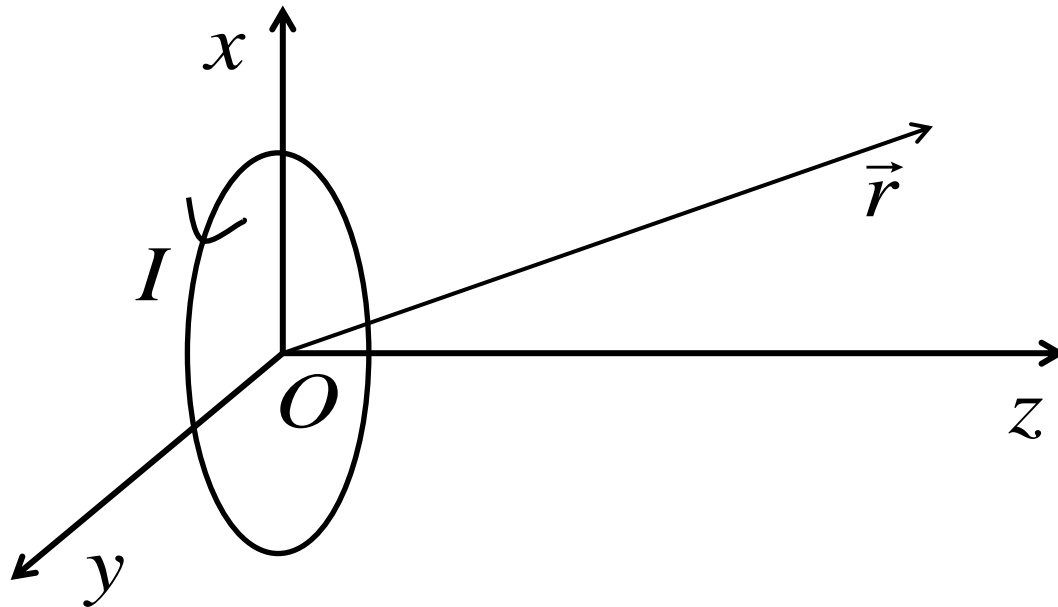
$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (Rz \cos \theta, Rz \sin \theta, R^2) d\theta$$

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Rz \cos \theta, Rz \sin \theta, R^2)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

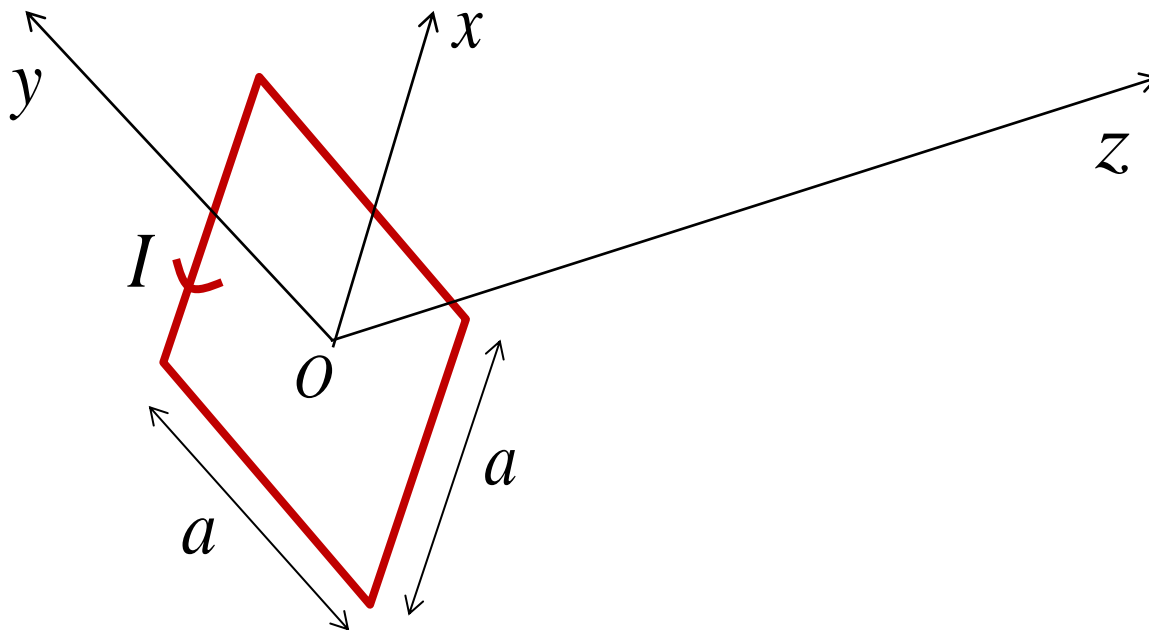
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(0, 0, 2\pi R^2)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(0, 0, \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

To był wynik analityczny dla punktów należących do osi z . Dla innych punktów możemy dostać wynik analityczny przy założeniu, że z jest znacznie większe od R .

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi} \frac{(3xz, 3yz, -x^2 - y^2 + 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$



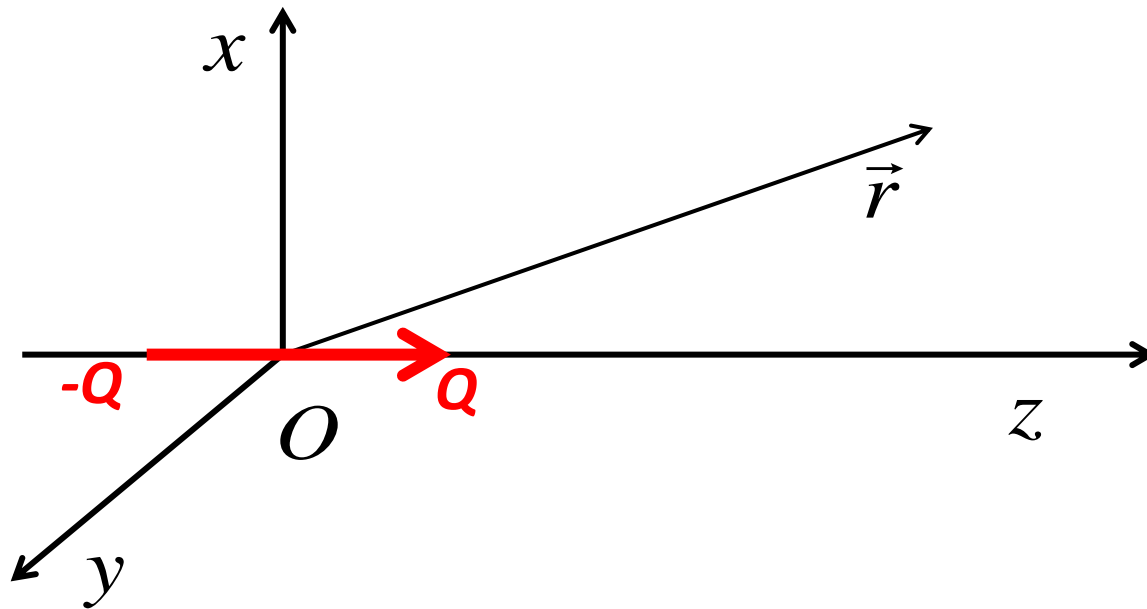
Moglibyśmy też zastosować prawo Biota-Savarta do policzenia indukcji magnetycznej pochodzącej od kwadratowej pętli o boku a z prądem o natężeniu I , leżącej w płaszczyźnie xy i mającej środek w początku układu współrzędnych, a boki równoległe do osi układu współrzędnych. W tym przypadku pole \mathbf{B} możemy policzyć dokładnie w dowolnym punkcie poza ramką z prądem !



Wynik w dużej odległości od obwodu z prądem byłby bardzo podobny. Zamiast πR^2 , mielibyśmy a^2 .

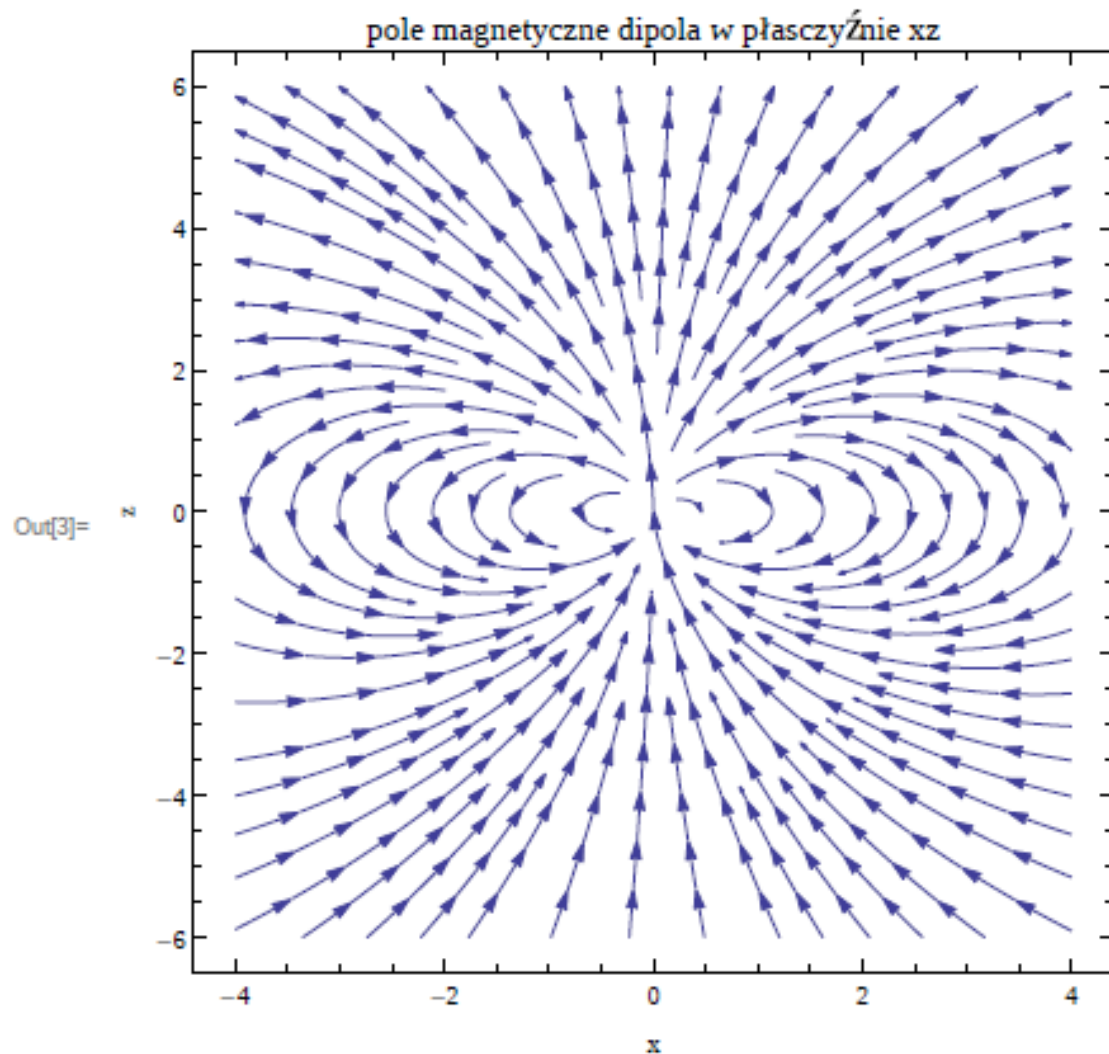
Zupełnie analogiczny wynik otrzymaliśmy na natężenie pola elektrycznego pochodzącego od dipola elektrycznego, czyli dwóch ładunków o tej wartości bezwzględnej, ale o przeciwnych znakach, umieszczonych w odległości L od siebie

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{LQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3xz, 3yz, -x^2 - y^2 + 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

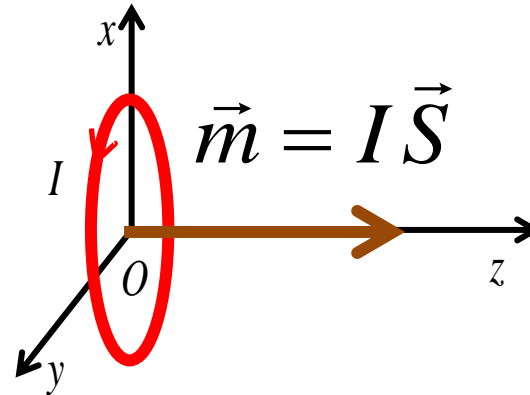
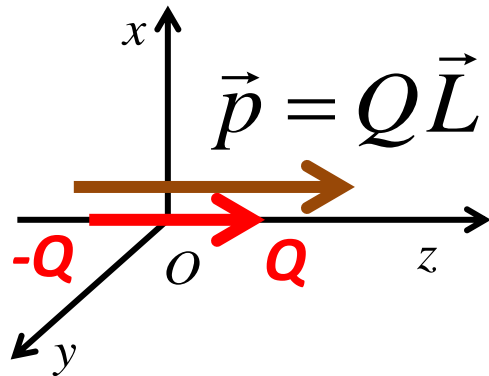


```
In[2]:= B = {3 * x * z, 3 * y * z, -x * x - y * y + 2 * z * z} / (x^2 + y^2 + z^2) ^ (5 / 2);
```

```
In[3]:= StreamPlot[{B[[1]], B[[3]]} /. {y -> 0}, {x, -4, 4}, {z, -6, 6},  
PlotLabel -> "pole magnetyczne dipola w płaszczyźnie xz", FrameLabel -> {"x", "z"}]
```



W takim razie napotykamy kolejny odpowiednik tego, co mieliśmy w elektrostatyce



Dipol elektryczny

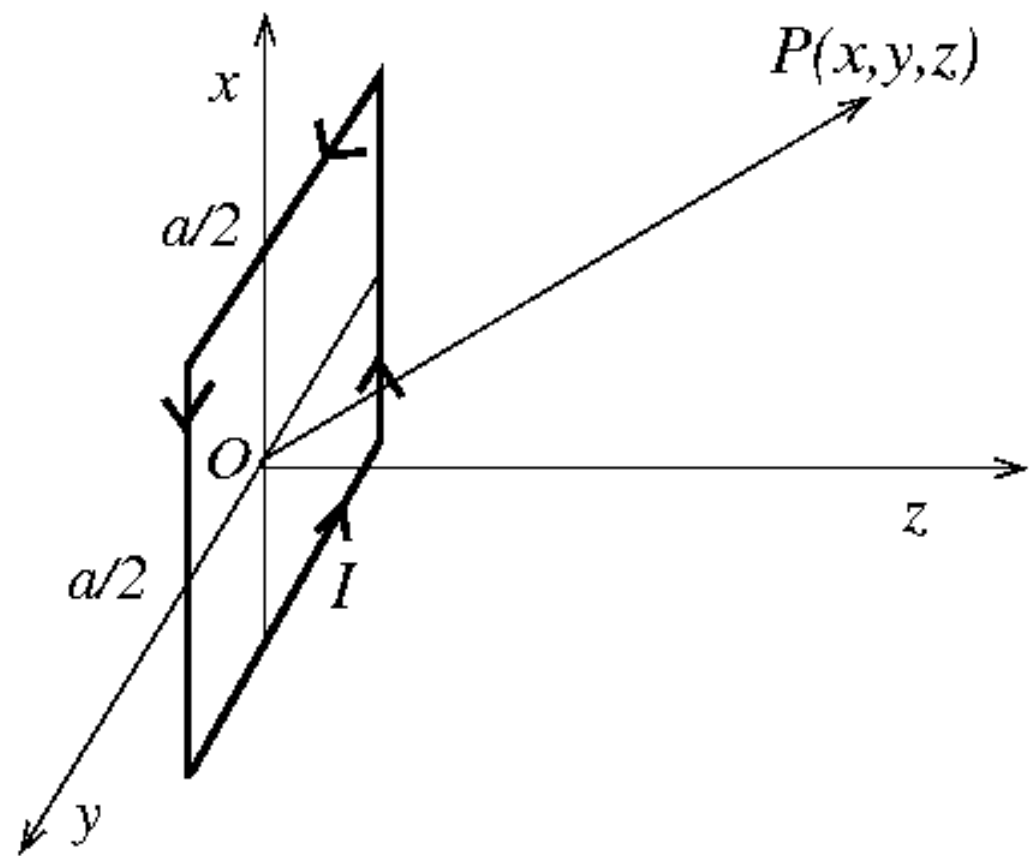
(dwa ładunki punktowe
przeciwnej znaku)

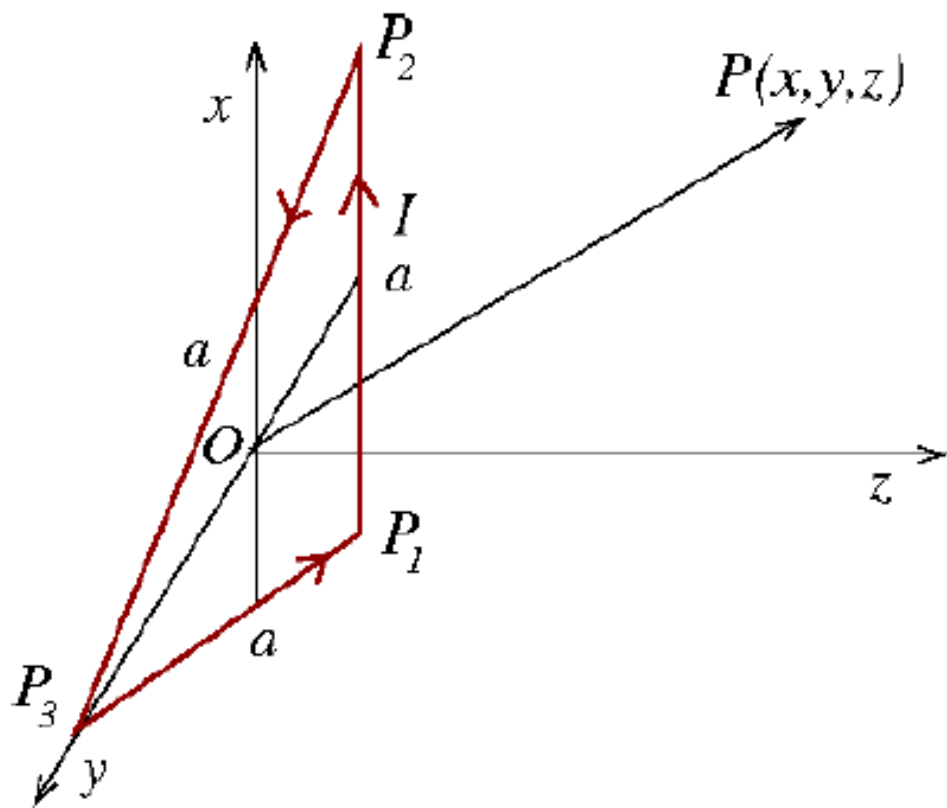
elektryczny moment dipolowy

Dipol magnetyczny

(obwód z prądem, niekoniecznie
płaskim)

magnetyczny moment dipolowy





Polecam notebooki, które zawierają kompletne przeliczenia:

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/
prawo_Biota_Savarta_ramki.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/prawo_Biota_Savarta_ramki.nb)

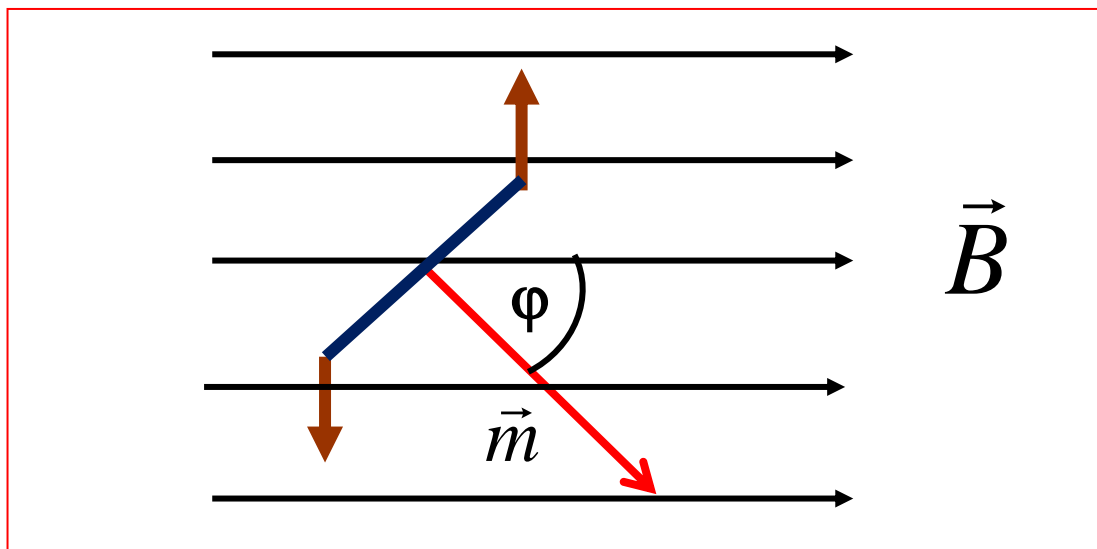
[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/
prawo_Biota_Savarta_spirala.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/prawo_Biota_Savarta_spirala.nb)

Dalsze analogie widoczne w zachowaniu dipola magnetycznego umieszczonego w jednorodnym polu magnetycznym.

Na obwód z prądem w jednorodnym polu magnetycznym nie działa żadna wypadkowa siła

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B} = I \underbrace{\left(\oint_{\Gamma} d\vec{l} \right)}_0 \times \vec{B} = \mathbf{0}$$

Siła wypadkowa jest równa zero, ale wypadkowy moment siły jest różny od zera i powoduje obrót ramki z prądem tak, by magnetyczny moment dipolowy ustawił się zgodnie z kierunkiem pola \mathbf{B}



$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

moment siły

Dipol swobodny ustawia się równolegle do wektora indukcji magnetycznej
Aby obrócić dipol, należy wykonać pracę !

Dipol w jednorodnym polu magnetycznym posiada więc energię potencjalną , $V=V(\phi)$, zależną od ustawienia jego momentu dipolowego względem wektora indukcji magnetycznej :

$$V(\varphi) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Liczne zastosowania w technice:
np. silniki elektryczne na prąd stały

Dipol magnetyczny w niejednorodnym polu magnetycznym

W tym przypadku nie tylko wypadkowy moment siły, ale także sama wypadkowa siła jest różna od zera ! Dla małych rozmiarów dipola możemy zapisać wypadkową siłę w przy pomocy operatora nabra:

$$\vec{F} = \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}$$

Dipol jest wciągany w obszar silniejszego pola magnetycznego

W przypadku elektrostatyki dipol elektryczny był podstawowym pojęciem przy omawianiu pola elektrycznego w materii !

Materia (dielektryczna) w polu elektrycznym stanowiła zbiór dipoli, które z kolei wytwarzały pole elektryczne.

W przypadku magnetostatyki jest podobnie. W materii można znaleźć momenty magnetyczne !