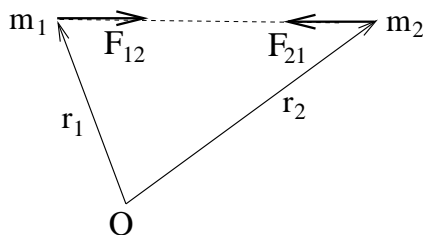


## Zagadnienie Keplera

To zagadnienie będzie potraktowane bardzo skrótowo i planuję podanie w tym miejscu jedynie podstawowych informacji. Zagadnienie Keplera jest dyskutowane w *każdym* podręczniku mechaniki. Polecam na przykład rozdział V pierwszego tomu *Wstępu do fizyki* A. K. Wróblewskiego i J. K. Zakrzewskiego, PWN, Warszawa 1984 lub rozdział III słynnej książki L. Landaua i E. Lifszica, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1966.

Rozważmy najpierw dwie punktowe masy  $m_1$  i  $m_2$ . Zgodnie z prawem powszechnego ciężenia oddziałują one na siebie siłami  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{21}$ , przy czym zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona zachodzi  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .



Mamy więc do czynienia z układem równań (1) i (2)

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \quad (2)$$

który można w zasadzie bezpośrednio rozwiązać (np. numerycznie) lub zredukować najpierw do *jednego równania* korzystając z faktu, że siły zależą jedynie od wektora  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  wzajemnej odległości między masami  $m_1$  i  $m_2$ .

Ta redukcja odbywa się w sposób następujący. Jeśli dodamy równania (1) i (2) stronami to dostaniemy

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0, \quad (3)$$

co można też zapisać jako

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = 0. \quad (4)$$

Oznacza to, że środek masy obu punktów materialnych

$$\vec{R} \equiv \left( \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (5)$$

porusza się ruchem jednostajnym ( $\vec{R}_0$  i  $\vec{V}_0$  to stałe wektory)

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t \quad (6)$$

i najprościej przyjąć, że układ dwóch mas jako całość spoczywa ( $\vec{R}(t) = 0$ ).

Pozostaje więc do rozwiązania *jedno* równanie na położenie względne  $\vec{r}$ . Dzieląc (1) przez  $m_1$ , a (2) przez  $m_2$  i odejmując równanie (2) od równania (1) dostaniemy

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}_{12}. \quad (7)$$

czyli

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}_{12}. \quad (8)$$

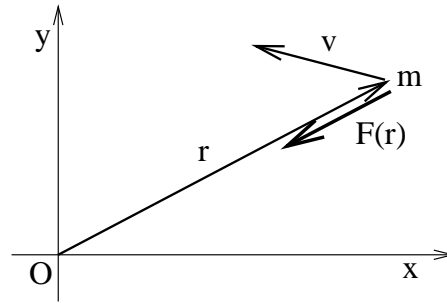
gdzie  $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Po znalezieniu  $\vec{r}(t)$  i dla wcześniej zdefiniowanego  $\vec{R}(t)$  położenia obu punktów materialnych dane są w postaci

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (9)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (10)$$

Mamy więc jakby do czynienia z ruchem jednego punktu materialnego o masie  $m$  pod wpływem siły

$$\vec{F} \equiv \vec{F}_{12} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \equiv -\kappa \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (11)$$



Dla takiego ruchu energia całkowita,

$$E \equiv \frac{m}{2} \vec{v}^2 - \frac{\kappa}{r} \equiv \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{\kappa}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (12)$$

oraz moment pędu liczony względem punktu  $O$

$$\vec{L}_O \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv m \vec{r} \times \vec{v}, \quad (13)$$

pozostają stałe w czasie. Jest też jasne, że ruch odbywa się w ustalonej płaszczyźnie. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to płaszczyzna  $xy$ , więc  $z(t) = 0$  i  $v_z(t) = 0$ . W takim przypadku tylko składowa  $L_z$  wektora  $\vec{L}$

$$L_z = mxv_y - myv_x \quad (14)$$

jest różna od zera. Jej wartość bezwzględną oznaczamy  $L$ . Wielkości  $E$  i  $L$  decydują o parametrach toru cząstki. Należy zwrócić uwagę, że  $E$  może być dodatnia, ujemna lub przyjmować wartość zero. Ostatecznie poszukujemy więc czterech wielkości:  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t) \equiv x'(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t)$ ,  $y(t)$  i  $\dot{y}(t) \equiv y'(t) \equiv \frac{d}{dt}y(t)$ .

## Wycieczka do układu biegunowego

Problem Keplera wygodnie jest rozważać w układzie biegunowym, bo w nim siła ma tylko jedną składową. Poniżej podam wyprowadzenie ważnego wzoru Bineta.

Odpowiednikiem układu równań

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y) \end{aligned}$$

jest teraz

$$\begin{aligned} ma_\varphi &\equiv m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = F_\varphi = 0 \\ ma_\rho &\equiv m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho(\rho) \equiv F(\rho) \end{aligned}$$

Równanie z  $a_\varphi$  można zapisać także w innej postaci:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi}) = 0$$

Oznacza to, że wielkość

$$m\rho^2\dot{\varphi}$$

jest stała w czasie ruchu. Jest to inaczej zapisana składowa momentu pędu  $L_z \equiv L$ , bo

$$\begin{aligned} L &= m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= m(\rho \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \dot{\varphi}) - \rho \sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \dot{\varphi})) = m\rho^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Zakładamy dalej, że  $L \neq 0$ , bo w przeciwnym wypadku ruch odbywałby się po linii prostej. Zachodzi więc

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}.$$

Równanie toru we współrzędnych biegunowych jest postaci

$$\rho = \rho(\varphi).$$

Dlatego

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{L}{m\rho^2} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

Dalej mamy

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}) = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \left( -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{L}{m\rho^2} = -\frac{L^2}{m^2\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

Wstawiając ten wynik do wzoru z  $a_\rho$ , dostajemy

$$-m \frac{L^2}{m^2\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) - m\rho \frac{L^2}{m^2\rho^4} = F(\rho)$$

i ostatecznie wzór Bineta:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{m\rho^2}{L^2} F(\rho).$$

Powyższy wzór umożliwia znalezienie siły centralnej, jeśli znane jest równanie toru  $\rho(\varphi)$ . I odwrotnie: jeśli znamy zależność siły centralnej od  $\rho$  i  $\varphi$ , to można określić  $\rho(\varphi)$ .

Zgodnie z I prawem Keplera planety poruszają się po eliptycznych orbitach, w których w jednym z ognisk znajduje się Słońce. Takie równanie elipsy ma we współrzędnych biegunowych postać

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

gdzie mimośród elipsy  $e$  i jej parametr  $p$  dane są wzorami

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

$$p = a(1 - e^2).$$

Dla takiej zależności  $\rho(\varphi)$  mamy

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{e \cos \varphi}{p}$$

i

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p},$$

więc ze wzoru Bineta dostajemy

$$F(\rho) = -\frac{L^2}{mp\rho^2},$$

czyli siła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości i przyciągająca.<sup>1</sup>

Oprócz pozycji dotyczących problemu Keplera wymienionych na początku wykładu, gorąco polecam także dostępną w sieci przedwojenną książkę znakomitego matematyka Stefana Banacha, *Mechanika*: <http://banach.univ.gda.pl/mechanika.html>

---

<sup>1</sup>Bezpośrednie podstawienie  $\rho = r_0 = \text{const}$  nie pozwala na znalezienie postaci funkcyjnej  $F(\rho)$ .

## Zagadnienie Keplera z momentem pędu $L \neq 0$

Równanie toru możemy ogólnie zapisać we współrzędnych biegunowych w postaci

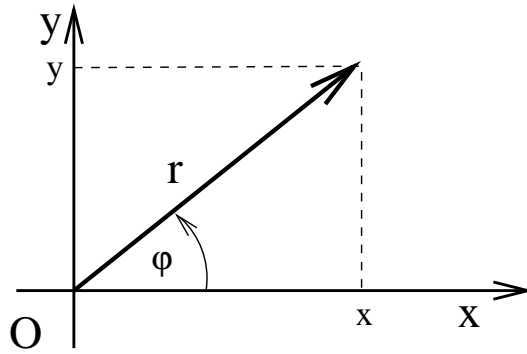
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (15)$$

Przedstawia ono krzywą stożkową o ognisku w początku układu współrzędnych, przy czym  $p$  i  $e$  są parametrem i mimośrodem krzywej.

$$p = \frac{L^2}{m \kappa} \quad (16)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m \kappa^2}}. \quad (17)$$

Kąt  $\varphi$  mierzony jest w taki sposób, że punkt o współrzędnej  $\varphi = 0$  jest najbliższym punktem centrum siły, tzw. peryhelium orbity.



Dla  $E < 0$  mimośród  $e < 1$ , co oznacza, że orbita jest elipsą o półosiach danych wzorami:

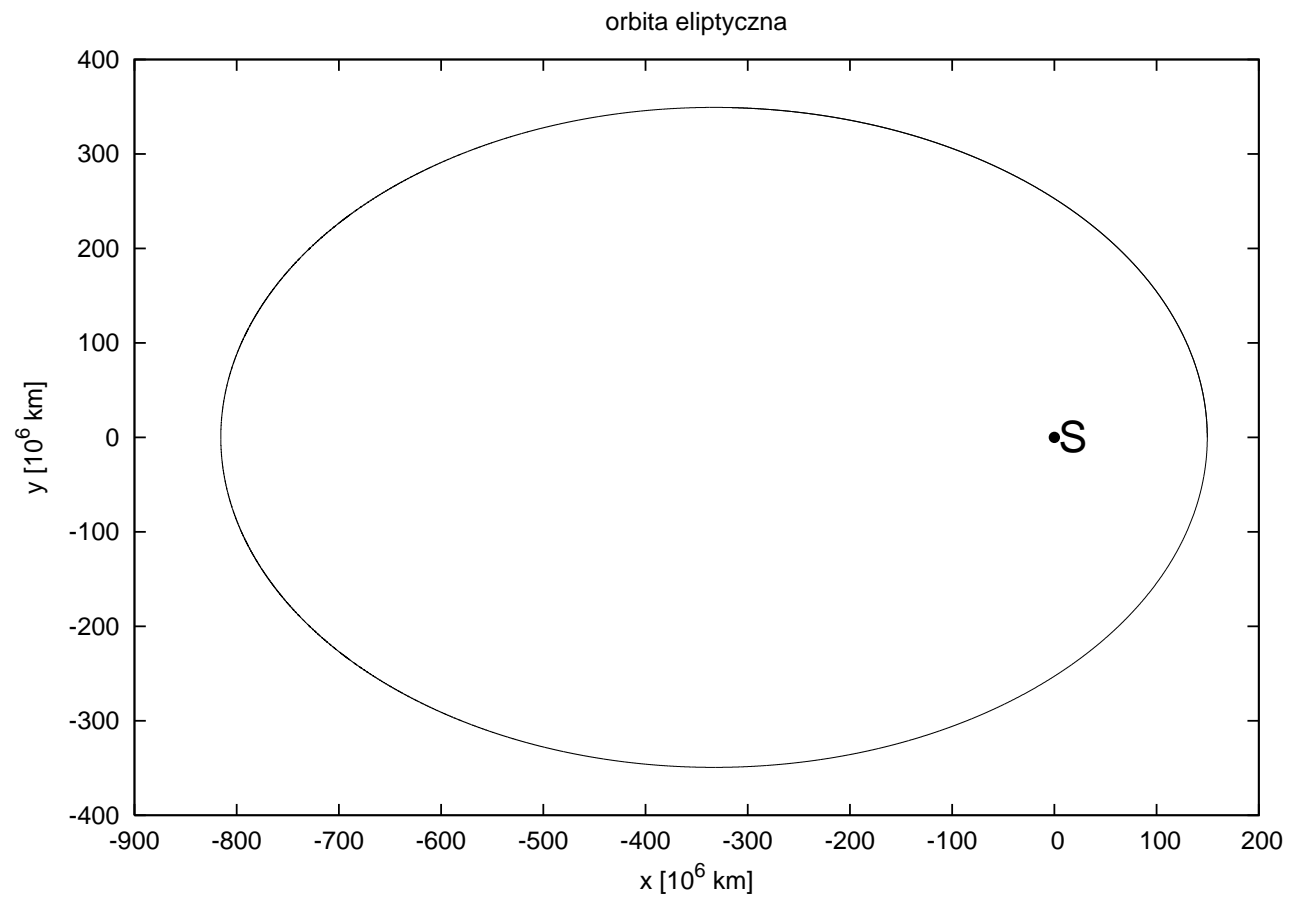
$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\kappa}{2 |E|} \quad (18)$$

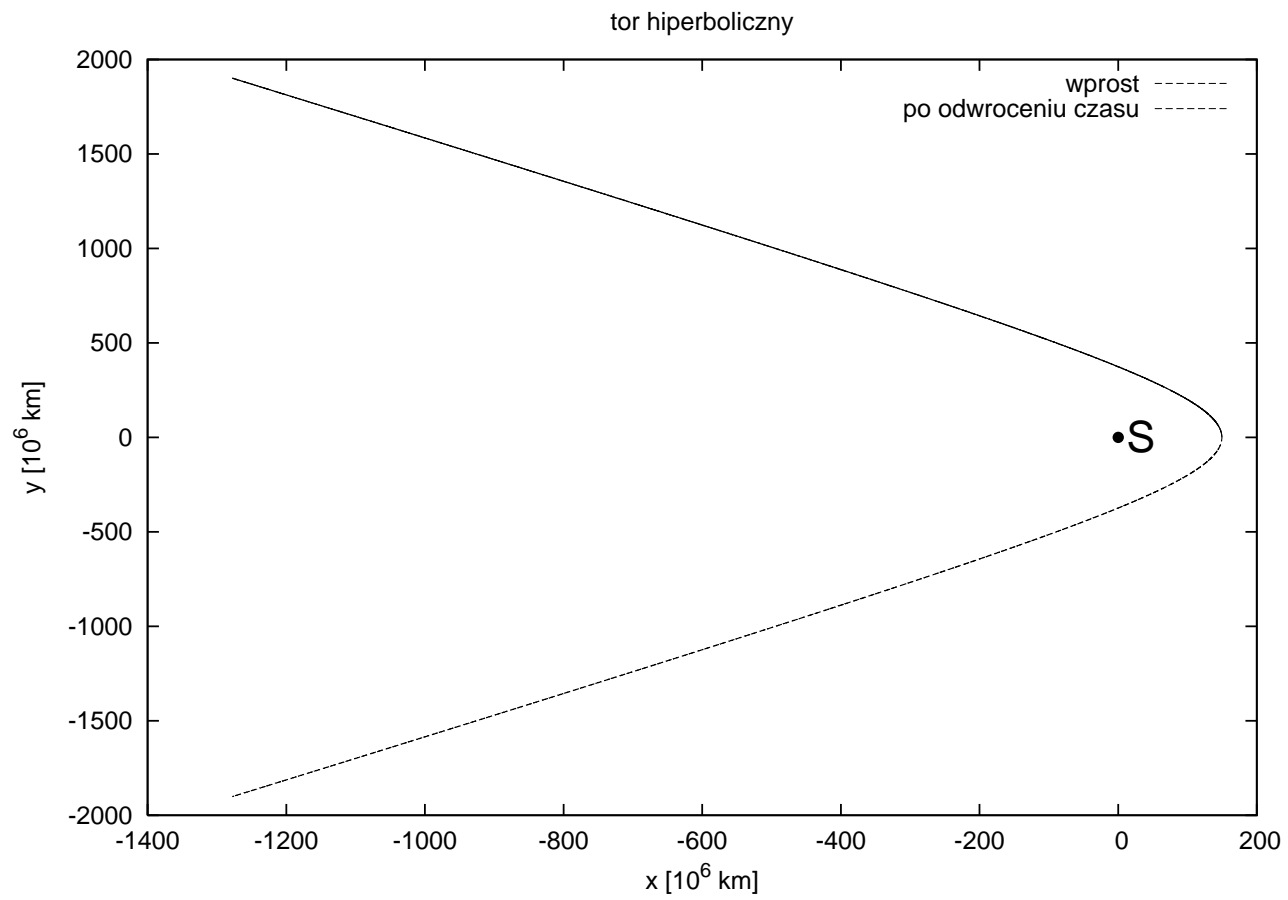
$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m |E|}}. \quad (19)$$

Najmniejsza dopuszczalna wartość energii przy ustalonym  $L$  to  $E_{min} = -\frac{m \kappa^2}{2 L^2}$ . Dla tej wartości energii  $e = 0$ , czyli elipsa przechodzi w okrąg o promieniu  $r = \frac{L^2}{m \kappa}$ .

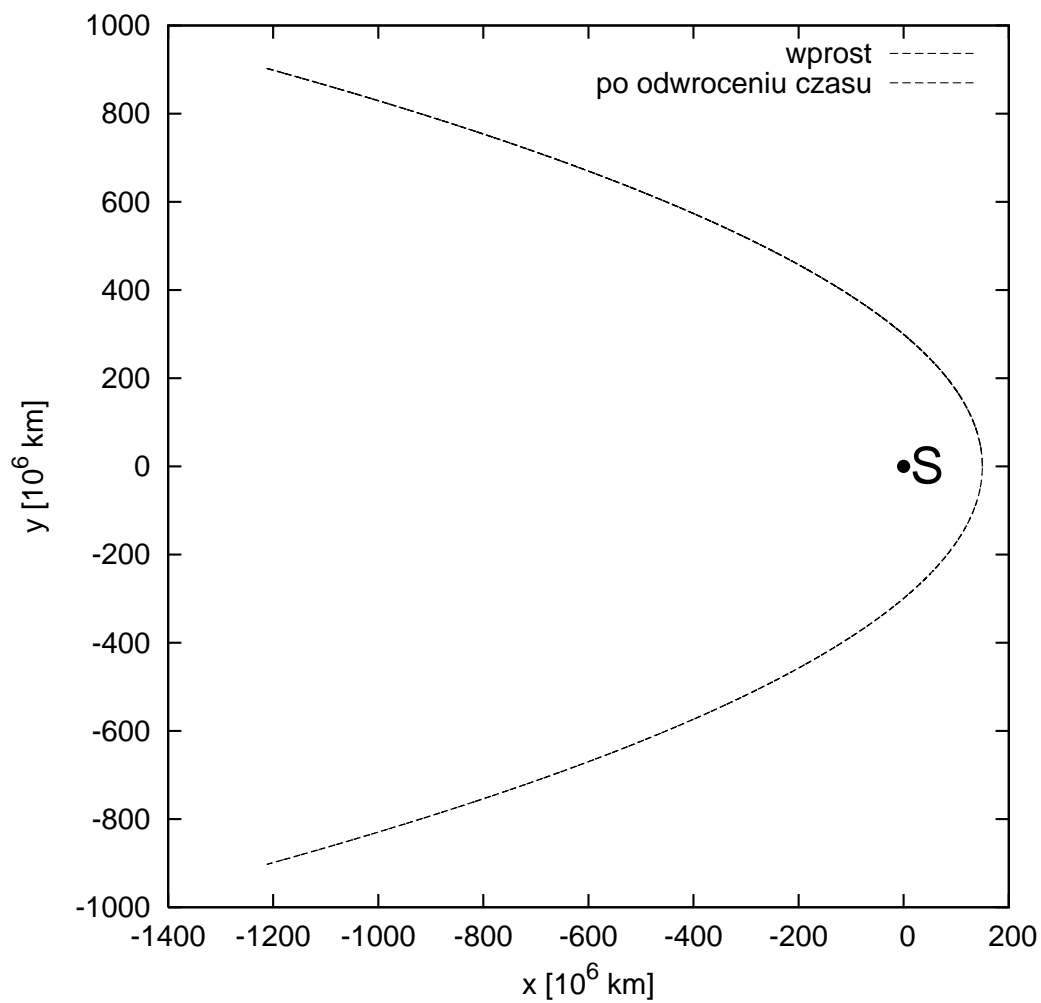
Zależność położenia od czasu na orbicie eliptycznej można podać jedynie w postaci parametrycznej. Wprowadzamy parametr  $\xi$  poprzez zależność

$$r - a = -ae \cos \xi \quad (20)$$





tor paraboliczny





Wówczas ( $\xi \in [0, 2\pi]$ )

$$r = a(1 - e \cos \xi) \quad (21)$$

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\xi - e \sin \xi) \quad (22)$$

$$x = a(\cos \xi - e) \quad (23)$$

$$y = b \sin \xi. \quad (24)$$

W szczególności czas obiegu opo orbicie eliptycznej wynosi

$$T = t(2\pi) - t(0) = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} \quad (25)$$

Dla toru parabolicznego wygodnym parametrem jest  $\tan \frac{\varphi}{2}$  ( $\tan \frac{\varphi}{2} \in (-\infty, \infty)$ ):

$$t = \frac{mp^2}{2L} \left( \tan \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (26)$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (27)$$

$$x = r \cos \varphi = \frac{p}{2} \left( 1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (28)$$

$$y = r \sin \varphi = p \tan \frac{\varphi}{2}. \quad (29)$$

Dla toru hiperbolicznego wprowadzamy parametr  $\chi$  ( $\chi \in (-\infty, \infty)$ ) i dostajemy

$$r = a(e \cosh \chi - 1) \quad (30)$$

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (e \sinh \chi - \chi) \quad (31)$$

$$x = a(e - \cosh \chi) \quad (32)$$

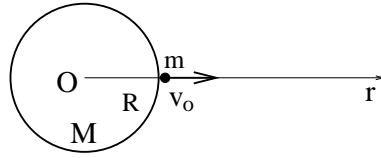
$$y = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh \chi. \quad (33)$$

Należy pamiętać, że dla hiperboli mamy inne związki między  $p$ ,  $e$ ,  $a$  i  $b$ :

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad (34)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (35)$$

## Ruch radialny w zagadnieniu Keplera Z orbitalnym momentem pędu $L=0$



Chcemy znaleźć  $r(t)$ , jeśli zachodzi  $r(t=0) = R$  oraz  $v(t=0) = v_0$ . Wygodnie jest użyć zasady zachowania energii

$$E \equiv \frac{-GMm}{R} + \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{-GMm}{r} + \frac{m}{2}v^2$$

i wyliczyć prędkość  $v(t)$ :

$$|v(t)| = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}}$$

Z dokładnością do znaku mamy

$$\pm \frac{dr}{dt} = |v(t)|$$

W sytuacji zaznaczonej na rysunku, w początkowej fazie ruchu zachodzi (niezależnie od znaku  $E$ )

$$0 < \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}}$$

i to równanie można rozwiązać analitycznie. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

Najprostszym przypadkiem to  $E = 0$ . Nie tylko na początku, ale w dowolnej chwili czasu zachodzi  $\frac{dr}{dt} > 0$ . Po prostych rachunkach dostajemy (notatki do wglądu)

$$r(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\right)^{\frac{2}{3}} \left(t + \frac{2R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} \left(t + \frac{2R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Dla  $E > 0$  także mamy do czynienia z ucieczką masy  $m$  do nieskończoności. Także w tym wypadku w dowolnej chwili czasu zachodzi  $\frac{dr}{dt} > 0$ , co prowadzi do

$$\int dt = \int dr \sqrt{\frac{r}{B + Ar}},$$

gdzie  $A = \frac{2|E|}{m} > 0$  i  $B = 2GM > 0$ .

$$\int dr \sqrt{\frac{r}{B + Ar}} = \frac{\sqrt{Ar}\sqrt{B + Ar}}{A^{\frac{3}{2}}} - \frac{B}{A^{\frac{3}{2}}} \log \left[ 2 \left( \sqrt{Ar} + \sqrt{B + Ar} \right) \right] \equiv f_1(r)$$

Dostajemy więc

$$t + C = f_1(r).$$

Tej zależności nie da się odwrócić, by uzyskać  $r(t)$  ! Warunek początkowy

$$0 + C = f_1(R)$$

pozwała na wyliczenie stałej  $C$  i podanie ostatecznego rozwiązania w postaci

$$t = t(r) = f_1(r) - f_1(R).$$

Rozważmy jeszcze ostatni przypadek,  $E < 0$ . W tym wypadku  $r$  nie może rosnąć do nieskończoności i ruch jest ograniczony:

$$r \leq \frac{B}{A} = \frac{GMm}{|E|} \equiv r_{max}.$$

Obiekt o masie  $m$  najpierw oddala się od masy  $M$ , a potem powraca. Całkowanie równania różniczkowego prowadzi do

$$\int dr \sqrt{\frac{r}{B - Ar}} = \frac{B \arctan \sqrt{\frac{Ar}{B - Ar}}}{A^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{(B - Ar)r}}{A} \equiv f_2(r)$$

Trzeba pamiętać, że dla powrotu

$$- |v(t)| = \frac{dr}{dt} < 0.$$

Definiujemy czas  $t_{max}$  w taki sposób, że  $r(t_{max}) = r_{max}$ . Ostatecznie, uwzględniając warunek początkowy dostajemy

$$t(r) = \begin{cases} f_2(r) - f_2(R) & , \quad 0 \leq t < t_{max} \\ t_{max} + f_2(r_{max}) - f_2(r) & , \quad t \geq t_{max} \end{cases}.$$

Proszę nie wierzyć ślepo podanym wyrażeniom !

## Precesja peryhelium Merkurego Poprawka do prawa powszechnego ciążenia

Orbita Merkurego ma znaczny mimośród  $e$ , równy 0.20563069. W peryhelium przybliża się ta planeta na  $r_{prh} = 0.30749951$  AU do Słońca, a w aphelium jej odległość od Słońca wynosi  $r_{aph} = 0.46669835$  AU. Okres obiegu Merkurego dookoła Słońca wynosi  $T = 0.240847$  lat ziemskich. W przypadku Merkurego nie mamy właściwie do czynienia z zamkniętą orbitą, bo peryhelium Merkurego zmienia swoją pozycję po każdym obiegu tej planety wokół Słońca. Ten efekt jest niewielki i wynosi jedynie 566 sekundy łuku na 100 ziemskich lat, co oznacza pełny obrót peryhelium w czasie około 230000 lat. Część tego efektu (około 523 sekund łuku na 100 lat) można wytłumaczyć na gruncie klasycznej mechaniki newtonowskiej wpływem innych planet. Brakujące 43 sekundy łuku na 100 lat zostało wyjaśnione przez Ogólną Teorię Względności (OTW) Einsteina. Efektywnie poprawkę OTW można sprowadzić w pierwszym przybliżeniu do dodatkowego składnika w prawie powszechnego ciążenia:

$$\vec{F}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \left( 1 + \frac{\alpha}{|\vec{r}|^2} \right), \quad (36)$$

gdzie dla Merkurego

$$\alpha \approx 1.1 \times 10^{-8} \text{ AU}^2.$$

Spróbujemy prześledzić numerycznie ten efekt. Bardzo ważną sprawą jest właściwy wybór warunków początkowych. Znając odległości Merkurego od Słońca w aphelium i peryhelium, możemy policzyć długość dłuższej półosi  $a$

$$a = \frac{1}{2} (r_{aph} + r_{prh}) = 0.38709 \text{ AU}.$$

Dalej wiemy, że okres  $T$  obiegu planety wokół Słońca jest związany z  $a$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_2}}.$$

W końcu wykorzystujemy związek między  $a$  i całkowitą energią  $E$

$$a = \frac{Gm_1m_2}{2 |E|}$$

po to, by znaleźć prędkość Merkurego w aphelium:

$$v_{aph} = \sqrt{Gm_2 \left( \frac{2}{r_{aph}} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Skoro znamy już warunki początkowe (w tym przypadku w aphelium), możemy teraz wykorzystać którykolwiek z programów liczących orbitę kołową Ziemi. Wystarczy w tym

celu zmienić odpowiednio warunki początkowe oraz zmodyfikować dwa spośród czterech równań układu. Dla zbadania precesji peryhelium (właściwie w naszym przypadku precesji aphelium, ale to jest równoważne), wygodnie jest wypisywać pozycję Merkurego po kolejnych okresach. Ponieważ efekt po jednym okresie jest bardzo niewielki, zalecane są właściwie dwie drogi postępowania

1. Wykonanie obliczeń z różnymi wartościami  $\alpha$  znacznie większymi od wartości prawdziwej, a następnie ekstrapolacja wyników do prawdziwej wartości  $\alpha$ .
2. Prześledzenie położenia Merkurego po bardzo wielu okresach (kilkaset tysięcy), co jest zupełnie wykonalne. W tym przypadku należy jednak upewnić się, że zmiany położenia Merkurego nie biorą się z numerycznych niedokładności akumulujących się wskutek bardzo długiego przedziału całkowania. W tym celu, dla referencji właściwe jest wykonanie równoległych obliczeń z  $\alpha = 0$ . Jeśli zmiany położenia Merkurego po bardzo wielu okresach dla  $\alpha = 0$  będą wciąż małe, mamy pewność, że obserwujemy właściwy efekt.

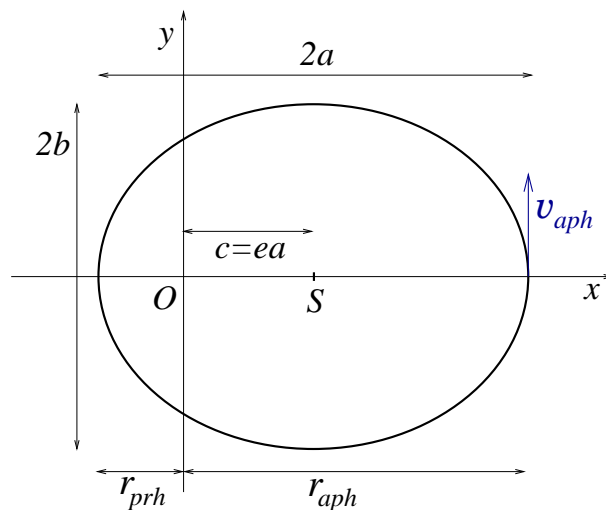
Energia całkowita układu  $E_{tot}$ ,

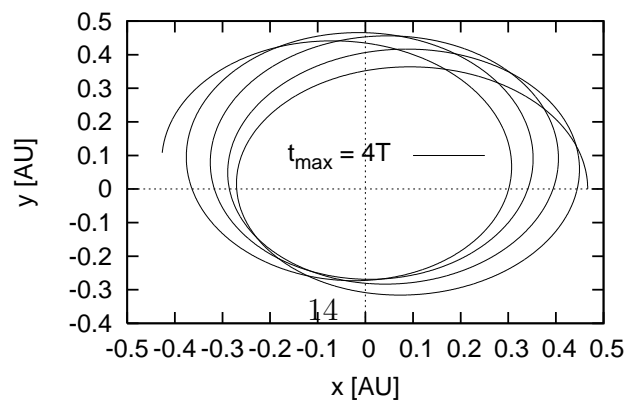
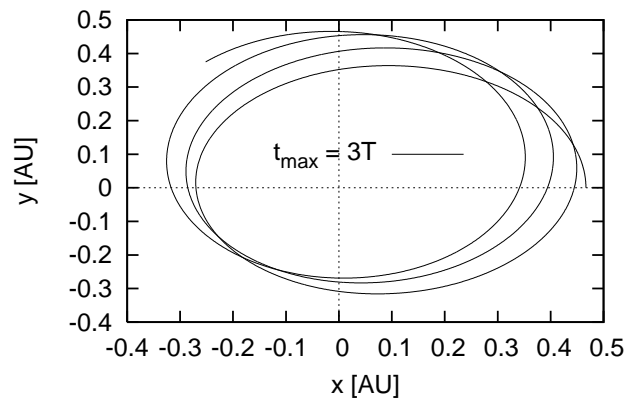
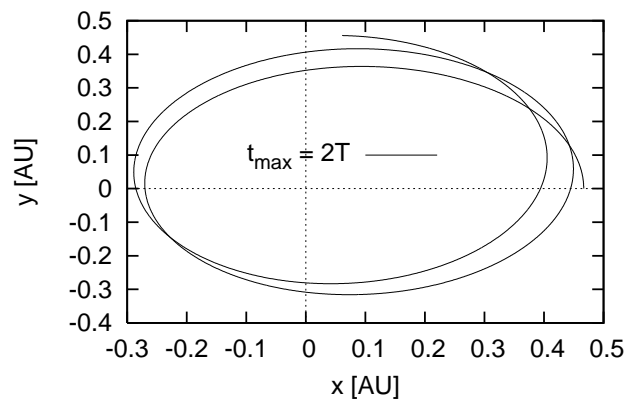
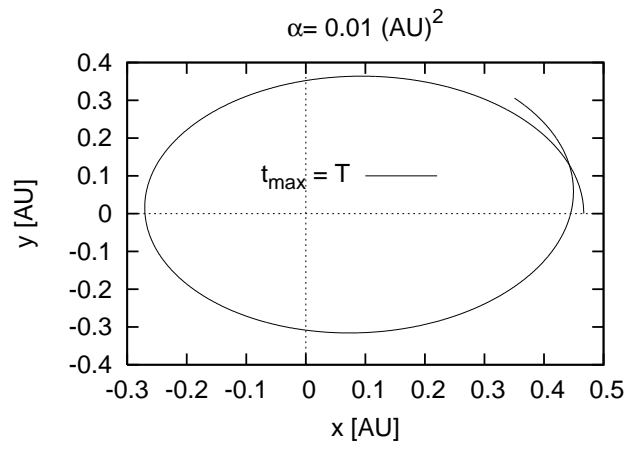
$$E_{tot} = E_{kin} - Gm_1m_2 \frac{1}{|\vec{r}|} - Gm_1m_2 \frac{\alpha}{3|\vec{r}|^3} \quad (37)$$

czyli suma energii kinetycznej  $E_{kin}$  oraz odpowiednio zmienionej energii potencjalnej powinna być stała w czasie. Również moment pędu

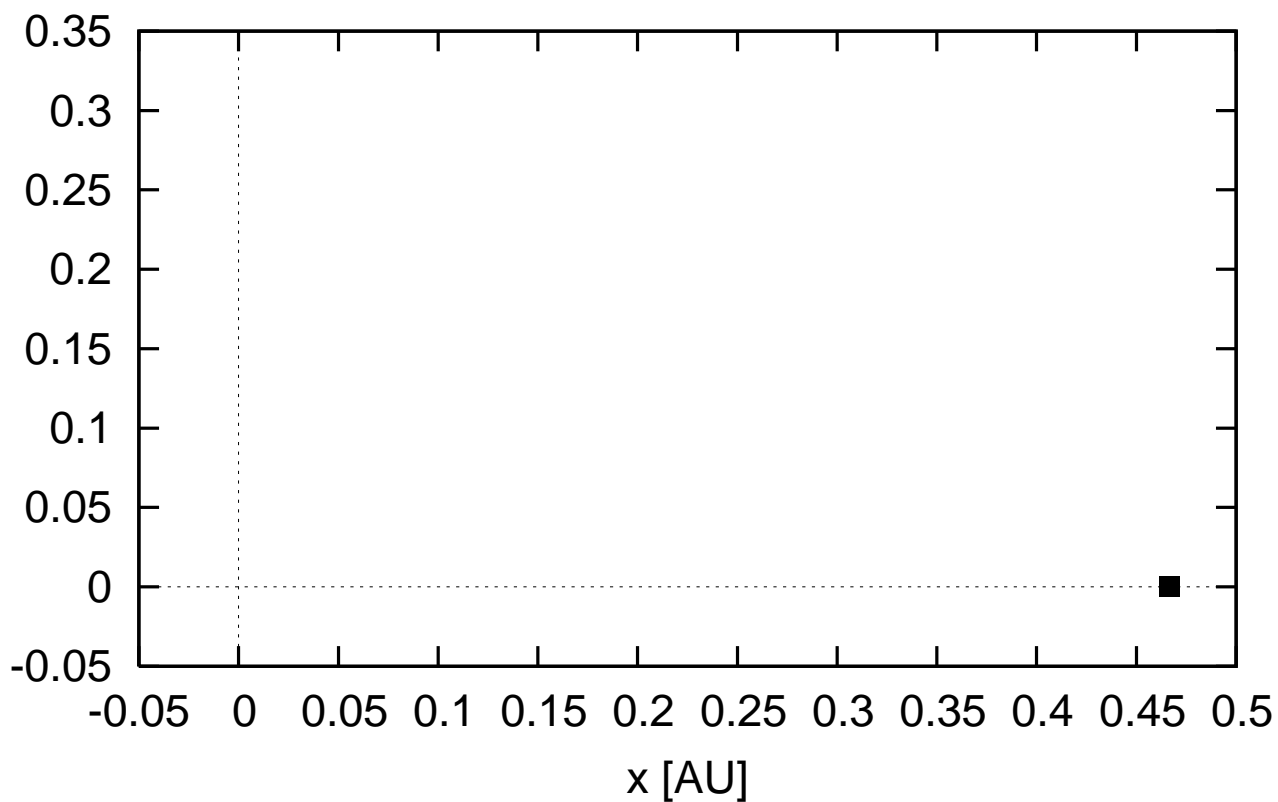
$$L_z = mxv_y - myv_x \quad (38)$$

jest zachowany, bo pomimo zmian wciąż mamy do czynienia z zachowawczą siłą centralną.





Stabilnosc rozwiazania z  $\alpha=0$ ,  $t_{\max} = 1.2 \cdot 10^6$  T



Obrot aphelium Merkurego,  $\alpha=1.1 \cdot 10^{-8} (\text{AU})^2$ ,  $t_{\max} = 1.2 \cdot 10^6$  T

