Oscylator harmoniczny tłumiony z sinusoidalną siłą wymuszającą

Jacek Golak

Zagadnienie oscylatora harmonicznego tłumionego pojawia się w wielu dziedzinach fizyki. W mechanice mamy z nim do czynienia, gdy na punkt materialny działają trzy siły: siła wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi, siła wprost proporcjonalna do prędkości oraz zewnętrzna siła wymuszająca. Zwykle rozważa się sinusoidalną siłę wymuszającą, bo (przynajmniej teoretycznie) wszystkie inne funkcje można przedstawić w postaci sumy (skończonej, przeliczalnej lub nieprzeliczalnej) funkcji sinusoidalnych o różnych częstościach. Zakładając przypadek jednowymiarowy równanie ruch ma więc postać

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F(t) \tag{1}$$

lub

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = a_0\cos(\omega_s t) + b_0\sin(\omega_s t). \tag{2}$$

Wprowadzamy zwykle oznaczenia

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{\gamma}{m}$$
$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

i równanie przyjmuje postać

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0\cos(\omega_s t) + b_0\sin(\omega_s t). \tag{3}$$

Ponieważ problem ma charakter niejednorodny, musimy znaleźć rozwiązanie ogólne problemu jednorodnego oraz jedno szczególne rozwiązanie dla problemu niejednorodnego.

Rozwiązanie szczególne $x_s(t)$ dla przypadku $\frac{1}{\tau} \neq 0$ lub $\omega_s \neq \omega_0$ ma postać (sprawdzić !)

$$x_s(t) = a'\cos(\omega_s t) + b'\sin(\omega_s t), \tag{4}$$

przy czym

$$a' = \frac{-b_0\omega_s\tau + a_0\tau^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)}{\omega_s^2 + \tau^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2}$$
$$b' = \frac{a_0\omega_s\tau + b_0\tau^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)}{\omega_s^2 + \tau^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2}.$$

W przeciwnym wypadku (jednocześnie $\frac{1}{\tau} = 0$ oraz $\omega_s = \omega_0$) rozwiązanie szczególne $x_s(t)$ dane jest wzorem (sprawdzić !)

$$x_s(t) = \left(a''\cos(\omega_s t) + b''\sin(\omega_s t)\right)\, t, \tag{5}$$

gdzie

$$a'' = -\frac{b_0}{2\omega_0}$$

$$b'' = \frac{a_0}{2\omega_0}.$$

Jest to przypadek tzw. rezonansu, gdy amplituda drgań rośnie liniowo z czasem.

Ogólne rozwiązanie problemu niejednorodnego jest sumą ogólnego rozwiązania problemu jednorodnego i szczególnego rozwiązania problemu niejednorodnego. Charakter ogólnego rozwiązania problemu jednorodnego zależy od wartości iloczynu $\omega_0\tau$.

1. Przypadek mocnego tłumienia $\omega_0\tau < \frac{1}{2}$

$$x(t) = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t) + a'\cos(\omega_s t) + b'\sin(\omega_s t), \tag{6}$$

gdzie

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} < 0$$

2. Przypadek mocnego tłumienia $\omega_0\tau = \frac{1}{2}$

$$x(t) = a\exp(\lambda t) + bt\exp(\lambda t) + a'\cos(\omega_s t) + b'\sin(\omega_s t), \tag{7}$$

gdzie

$$\lambda = -\frac{1}{2\tau}.$$

3. Przypadek słabego tłumienia $\omega_0\tau > \frac{1}{2}$

$$x(t) = a\exp(-\frac{t}{2\tau})\cos(\omega t) + b\exp(-\frac{t}{2\tau})\sin(\omega t) + a'\cos(\omega_s t) + b'\sin(\omega_s t), \tag{8}$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} < \omega_0.$$

4. Przypadek rezonansu ($\frac{1}{\tau} = 0$ oraz $\omega_s = \omega_0$)

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + ta''\cos(\omega_0 t) + tb''\sin(\omega_0 t), \tag{9}$$

Uwaga: Parametry a i b są dowolne; ustalamy je uwzględniając warunki początkowe, tzn. wartość położenia w chwili $t = 0$

$$x(t=0) = x_0 \tag{10}$$

i wartość prędkości w chwili $t = 0$

$$\dot{x}(t = 0) = v_0. \tag{11}$$

Polecam notatnik programu *Mathematica*,
oscylator_przypadki_OK.nb,
który sprawdza poprawność rozwiązań szczególnych (wzory (4)–(5)) i rozwiązań ogólnych (wzory (6)–(8)). Notatnik znajduje ponadto w poszczególnych przypadkach wielkości a i b z układu równań (10) i (11).

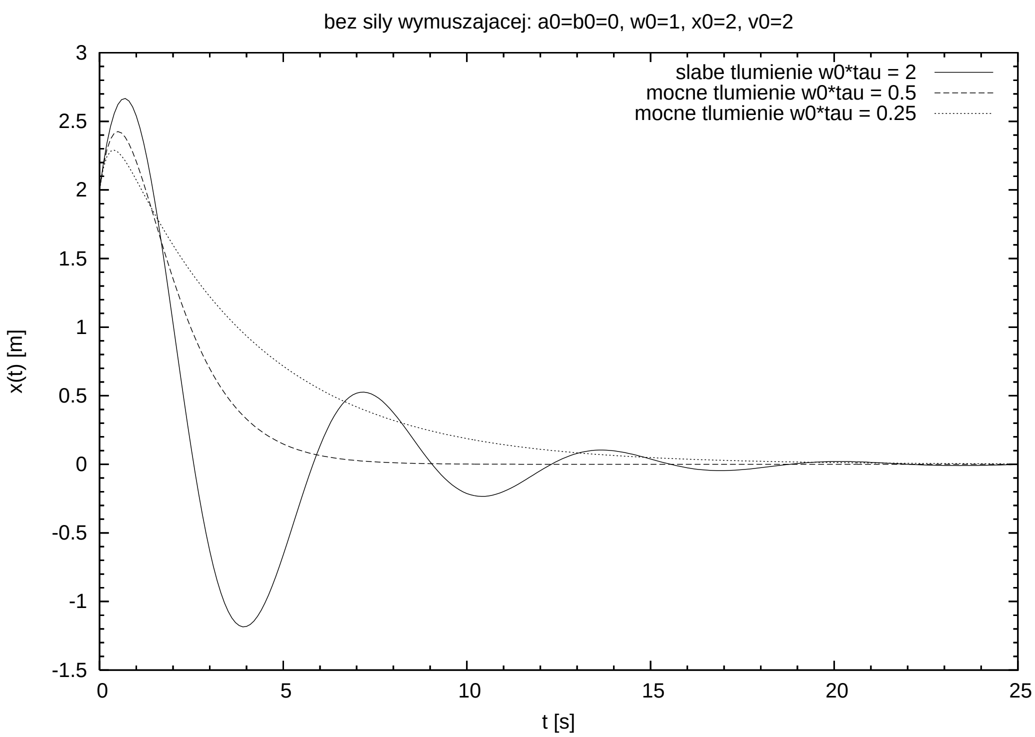

Figure 1: Przykładowe rozwiązania problemu jednorodnego

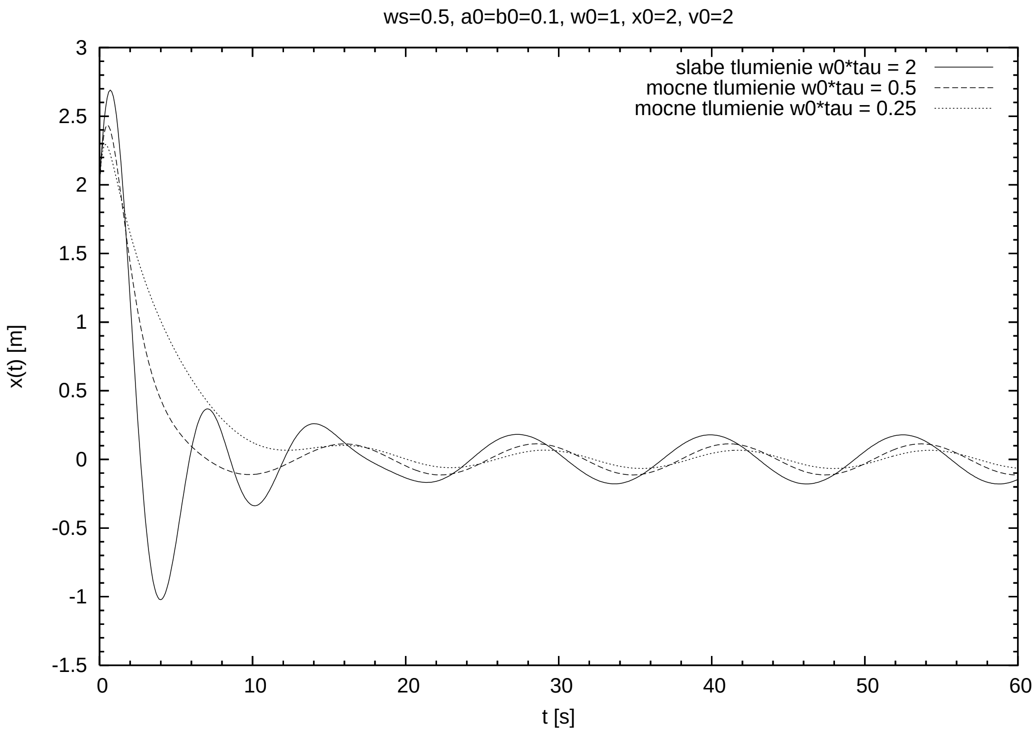

Figure 2: Przykładowe rozwiązania problemu niejednorodnego

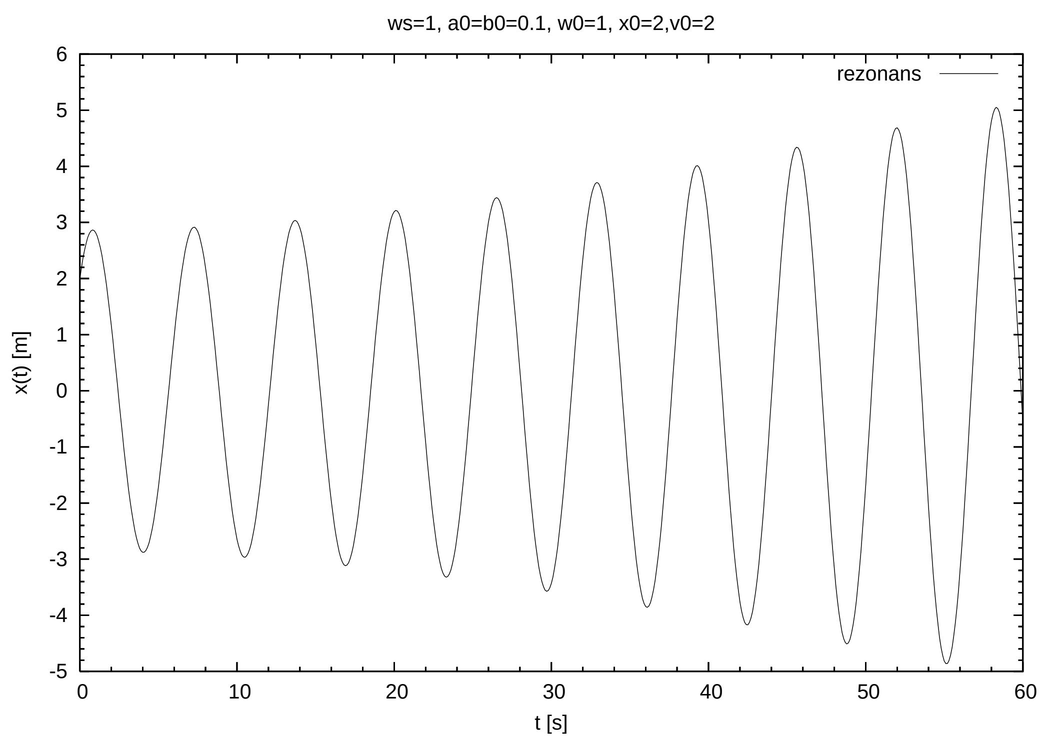

Figure 3: Przykładowe rozwiązania problemu niejednorodnego (rezonans)