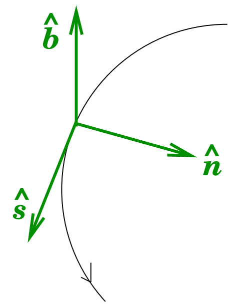
Prędkość i przyspieszenie we współrzędnych naturalnych



Położenie punktu materialnego poruszającego się po krzywej można także określić podając długość odcinka krzywej dzielącego dany punkt od wybranego punktu początkowego. Orientacja w przestrzeni wymaga wprowadzenia trójki wersorów $\hat{s}$, $\hat{n}$ i $\hat{b}$. Wersor $\hat{s}$ jest wersorem stycznym i jego zwrot wynika z kierunku ruchu, wersor normalny $\hat{n}$ jest skierowany do środka krzywizny, wersor binormalny $\hat{b}$ dany jest wzorem $\hat{b} = \hat{s} \times \hat{n}$.

Układ wzajemnie prostopadłych wersorów $\hat{s}$, $\hat{n}$ i $\hat{b}$ konstruujemy w taki sposób, że prędkość ma tylko jedną składową (wzdłuż wersora $\hat{s}$), a przyspieszenie co najwyżej dwie (składową styczną i normalną). Jest tak dlatego, że do konstrukcji $\hat{s}$ i $\hat{n}$ używamy właśnie wektorów prędkości $\vec{v}$ i przyspieszenia $\vec{a}$. Taka jednoznaczna konstrukcja jest możliwa tylko wtedy, gdy wektory $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są liniowo niezależne.

$$\hat{s} \equiv \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|} \tag{1}$$

i dlatego

$$\vec{v} = |\,\vec{v}\,|\,\hat{s}. \tag{2}$$

Wersor $\hat{n}$ zapiszemy jako kombinację liniową wektorów $\vec{v}$ i $\vec{a}$

$$\hat{n} = \alpha_1\,\vec{v} \;+\; \alpha_2\,\vec{a},$$

żądając, by $\hat{n} \cdot \hat{s} = 0$ oraz $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$.

$$0 = \hat{n} \cdot \hat{s} = (\alpha_1\,\vec{v} \;+\; \alpha_2\,\vec{a}) \cdot \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|} = \alpha_1|\,\vec{v}\,| + \alpha_2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\,\vec{v}\,|} \;\longrightarrow\; \alpha_1 = -\alpha_2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = \alpha_2^2 \left(\vec{a} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,\vec{v} \right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,\vec{v} \right) =$$

$$= \alpha_2^2 \left(\vec{a}^{\;2} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{(\vec{v} \cdot \vec{v})^2}\,\vec{v}^{\;2} - 2\,\frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) = \alpha_2^2 \left(\vec{a}^{\;2} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) =$$

$$= \frac{\alpha_2^2}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \left(\vec{a}^{\;2}\,\vec{v}^{\;2} - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \right) = \frac{\alpha_2^2}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,|\,\vec{a} \times \vec{v}\,|^2 \;=\; 1.$$

(Uwaga: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\,\vec{a}\,|^2$ dla dowolnego wektora $\vec{a}$.) Dlatego

$$\alpha_2 = \frac{|\,\vec{v}\,|}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}$$

i

$$\hat{n} = \frac{|\,\vec{v}\,|}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|} \left(\vec{a} \; - \; \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\, \vec{v}. \right) \tag{3}$$

Teraz łatwo już obliczyć wersor binormalny $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \hat{s} \times \hat{n} = \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|} \times \frac{|\,\vec{v}\,|}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|} \left(\vec{a} \; - \; \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\, \vec{v} \right) \; = \; \frac{1}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|} \left(\vec{v} \times \vec{a} \right) \tag{4}$$

Na koniec obliczamy składową styczną i normalną przyspieszenia oraz przy okazji wyprowadzamy tak zwany pierwszy wzór Freneta

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(|\,\vec{v}\,|\, \hat{s} \right) = \left(\frac{d}{dt} \,|\,\vec{v}\,| \right) \hat{s} \; + \; |\,\vec{v}\,| \left(\frac{d}{dt}\, \hat{s} \right)$$

$$\frac{d}{dt}\, \hat{s} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} \right) \; = \; \frac{1}{|\,\vec{v}\,|}\, \vec{a} \; - \; \frac{1}{|\,\vec{v}\,|^2}\, \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\,\vec{v}\,|}\, \vec{v} \; =$$

$$= \; \frac{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}{|\,\vec{v}\,|^2} \left(\frac{|\,\vec{v}\,|}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}\, \vec{a} \; - \; \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}\, \frac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|} \right) \; \equiv \; \frac{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}{|\,\vec{v}\,|^2}\, \hat{n}$$

W ten sposób policzyliśmy przyspieszenie $\vec{a}$ w bazie $\hat{s}$ i $\hat{n}$:

$$\vec{a} \; = \; \left(\frac{d}{dt} \,|\,\vec{v}\,| \right) \hat{s} \; + \; |\,\vec{v}\,|\, \frac{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}{|\,\vec{v}\,|^2}\, \hat{n} \tag{5}$$

Składowa styczna to $a_s = \frac{d}{dt} \,|\,\vec{v}\,|$. Składową normalną $a_n = |\,\vec{v}\,|\, \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^2}$ zapisujemy w sposób następujący

$$a_n = |\,\vec{v}\,|\, \frac{|\,\vec{v} \times \vec{a}\,|}{|\,\vec{v}\,|^2} = \frac{|\,\vec{v}\,|^2}{\frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}} \; \equiv \; \frac{|\,\vec{v}\,|^2}{\mathcal{R}},$$

gdzie $\mathcal{R} \equiv \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$ jest promieniem krzywizny, który może zmieniać się od punktu do punktu i jest w związku z tym funkcją czasu. Widzimy więc, że

$$\frac{d}{dt}\, \hat{s} \; = \; \frac{1}{\mathcal{R}} \; |\,\vec{v}\,| \; \hat{n}$$

czyli

$$\frac{d}{dl}\, \hat{s} \; = \; \frac{1}{\mathcal{R}}\, \hat{n},$$

gdzie $dl \equiv dt \,|\,\vec{v}\,|$ jest długością elementu łuku. To jest treść pierwszego wzoru Freneta.

Jacek Golak