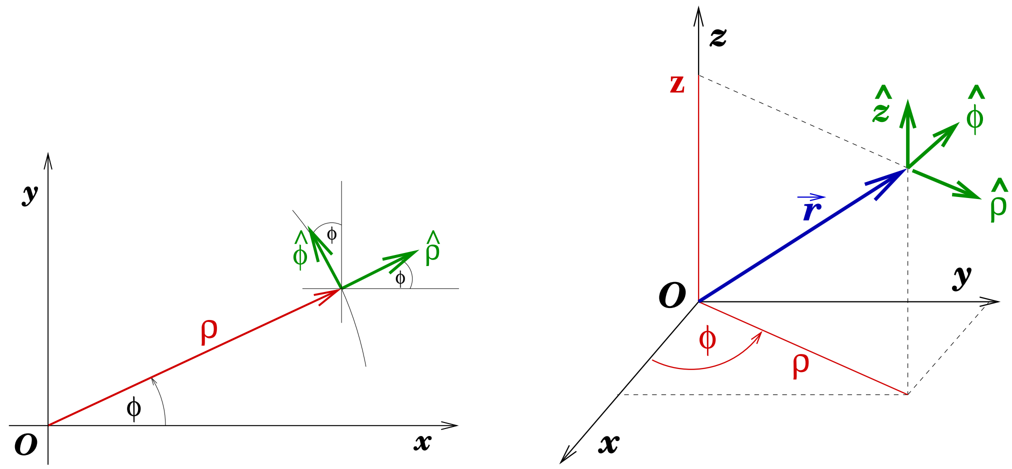
Prędkość i przyspieszenie w układzie walcowym



$$\vec{r} \;=\; x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \;=\; \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

Wersory (jednostkowe wektory) $\hat{\rho}$ i $\hat{\phi}$ nie są stałe, ale zmieniają się od punktu do punktu i dlatego w czasie ruchu są funkcją czasu:

$$\begin{cases} \hat{\rho} &= \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases} \tag{1}$$

W każdym punkcie jednak wersory $\hat{\rho}$ i $\hat{\phi}$ są wzajemnie prostopadłe:

$$\hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = (\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})\cdot(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}) = 0.$$

Prędkość $\vec{v}$ obliczamy jako pochodną po czasie wektora położenia $\vec{r}$.

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}\right) = \frac{d\rho}{dt}\,\hat{\rho} + \rho\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z}$$

Korzystając z zależności (1) dostajemy

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}\right) \;=\; -\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} \;+\; \cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} \;=\; \dot{\phi}\,\hat{\phi},$$

gdzie $\dot{\phi}$ oznacza pochodną po czasie: $\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt}$.
Dlatego prędkość w układzie walcowym ma postać

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} \;+\; \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; \dot{z}\,\hat{z}.$$

$\dot{\rho}$ to składowa radialna, a $\rho\,\dot{\phi}$ to składowa transwersalna prędkości. Długość wektora prędkości można policzyć jako

$$|\,\vec{v}\,| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\,\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2}$$

Teraz możemy policzyć przyspieszenie $\vec{a}$:

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\hat{\rho} \;+\; \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; \dot{z}\,\hat{z}\right)$$

$$= \ddot{\rho}\,\hat{\rho} \;+\; \dot{\rho}\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} \;+\; \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; \rho\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; \rho\,\dot{\phi}\,\frac{d\hat{\phi}}{dt} \;+\; \ddot{z}\,\hat{z} \tag{2}$$

Pochodna $\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ już została policzona. Korzystając ponownie z zależności (1) liczymy $\frac{d\hat{\phi}}{dt}$:

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}\right) \;=\; -\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} \;-\; \sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} \;=\; -\dot{\phi}\,\hat{\rho}.$$

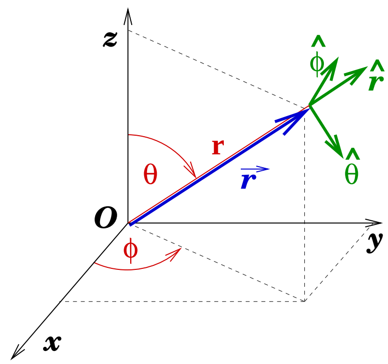
Podstawiając $\frac{d\hat{\rho}}{dt}$ oraz $\frac{d\hat{\phi}}{dt}$ do (2) i grupując wyrazy dostajemy

$$\vec{a} \;=\; \left(\ddot{\rho} \,-\, \rho\,\dot{\phi}^2\right)\,\hat{\rho} \;+\; \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} \,+\, \rho\,\ddot{\phi}\right)\,\hat{\phi} \;+\; \ddot{z}\,\hat{z}.$$

$\ddot{\rho} \,-\, \rho\,\dot{\phi}^2$ to składowa radialna, a $2\dot{\rho}\dot{\phi} \,+\, \rho\,\ddot{\phi}$ to składowa transwersalna przyspieszenia. Długość wektora prędkości można policzyć jako

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} \,-\, \rho\,\dot{\phi}^2\right)^2 \;+\; \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} \,+\, \rho\,\ddot{\phi}\right)^2 \;+\; \ddot{z}^2}$$

Prędkość i przyspieszenie w układzie sferycznym



$$\vec{r} \;=\; x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \;=\; r\,\hat{r}$$

Wersory $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ i $\hat{\phi}$ zmieniają się od punktu do punktu i dlatego w czasie ruchu są funkcją czasu:

$$\left\{ \begin{array}{lcrcrcr} \hat{r} & = & \sin\theta\,\cos\phi\,\hat{x} & + & \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} & + & \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} & = & \cos\theta\,\cos\phi\,\hat{x} & + & \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} & - & \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} & = & -\sin\phi\,\hat{x} & + & \cos\phi\,\hat{y} & & \end{array} \right. \tag{3}$$

Obliczamy najpierw pochodne wersorów po czasie:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \Big(\cos\theta\,\cos\phi\,\dot{\theta} - \sin\theta\,\sin\phi\,\dot{\phi}\;,\;\cos\theta\,\sin\phi\,\dot{\theta} + \sin\theta\,\cos\phi\,\dot{\phi}\;,\;-\sin\theta\,\dot{\theta}\Big)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \Big(-\sin\theta\,\cos\phi\,\dot{\theta} - \cos\theta\,\sin\phi\,\dot{\phi}\;,\;-\sin\theta\,\sin\phi\,\dot{\theta} + \cos\theta\,\cos\phi\,\dot{\phi}\;,\;-\cos\theta\,\dot{\theta}\Big)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \Big(-\cos\phi\,\dot{\phi}\;,\;-\sin\phi\,\dot{\phi}\;,\;0\Big)$$

Następnie wyrażamy te pochodne w bazie $\left(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\right)$. Ponieważ wersory są wzajemnie prostopadłe, najprościej jest policzyć odpowiednie iloczyny skalarne. Na przykład dla $\frac{d\hat{r}}{dt}$ zapisujemy

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = a_1\,\hat{r} \;+\; b_1\,\hat{\theta} \;+\; c_1\,\hat{\phi},$$

gdzie współczynniki a_1, b_1 i c_1 dane są jako

$$a_1 = \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{r}$$

$$b_1 = \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{\theta}$$

$$c_1 = \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{\phi}$$

Aby ograniczyć rachunki warto zauważyć, że pochodna wersora jest do niego zawsze prostopadła:

$$0 \;=\; \frac{d(1)}{dt} \;=\; \frac{d(\hat{r}\cdot\hat{r})}{dt} \;=\; \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{r} + \hat{r}\cdot\frac{d\hat{r}}{dt} \;=\; 2\,\frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{r}$$

Stąd wynika w szczególności, że $a_1 = 0$.

Podobnie dowodzimy, że dla dwóch różnych wersorów, na przykład $\hat{r}$ i $\hat{\theta}$, zachodzi

$$0 \;=\; \frac{d(0)}{dt} \;=\; \frac{d(\hat{r}\cdot\hat{\theta})}{dt} \;=\; \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{\theta} + \hat{r}\cdot\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

W konsekwencji

$$\frac{d\hat{r}}{dt}\cdot\hat{\theta} \;=\; -\frac{d\hat{\theta}}{dt}\cdot\hat{r}.$$

Po prostych przeliczeniach dostajemy więc

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \;+\; \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \tag{4}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{r} \;+\; \cos\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \tag{5}$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{r} \;-\; \cos\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\theta} \tag{6}$$

Teraz możemy już policzyć prędkość $\vec{v}$

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(r\,\hat{r}) \;=\; \frac{dr}{dt}\,\hat{r} \;+\; r\,\frac{d\hat{r}}{dt} \;=\; \dot{r}\,\hat{r} \;+\; r\,\left(\dot{\theta}\,\hat{\theta} \;+\; \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\right)$$
$$= \;\dot{r}\,\hat{r} \;+\; r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \;+\; r\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi},$$

a następnie przyspieszenie $\vec{a}$:

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\,\dot{r}\,\hat{r} \;+\; r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \;+\; r\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\right) \;=\; \ddot{r}\,\hat{r} \;+\; \dot{r}\,\frac{d}{dt}\hat{r} \;+\; \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} \;+$$
$$r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} \;+\; r\,\dot{\theta}\,\frac{d}{dt}\hat{\theta} \;+\; \dot{r}\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; r\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; r\,\sin\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi} \;+\; r\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\frac{d}{dt}\hat{\phi} \tag{7}$$

Podstawiając (4), (5) oraz (6) do (7) i grupując wyrazy dostajemy ostatecznie

$$\vec{a} \;=\; \left(\,\ddot{r} \,-\, r\dot{\theta}^2 \,-\, r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\,\right)\hat{r} \;+\; \left(\,2\dot{r}\dot{\theta} \,+\, r\ddot{\theta} \,-\, r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\,\right)\hat{\theta} \;+$$
$$\left(\,2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} \,+\, 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} \,+\, r\sin\theta\ddot{\phi}\,\right)\hat{\phi}$$

Uwaga: powyższe wyprowadzenie wzorów dla współrzędnych walcowych i sferycznych ma charakter bardzo bezpośredni i nie odwołuje się do wiadomości z zakresu różniczkowania funkcji wielu zmiennych. Ogólny rachunek dla dowolnych współrzędnych krzywoliniowych można znaleźć na przykład w podręczniku A. Januszajtisa, *Fizyka dla politechnik*, w paragrafie 9 tomu *Cząstki*.

Jacek Golak