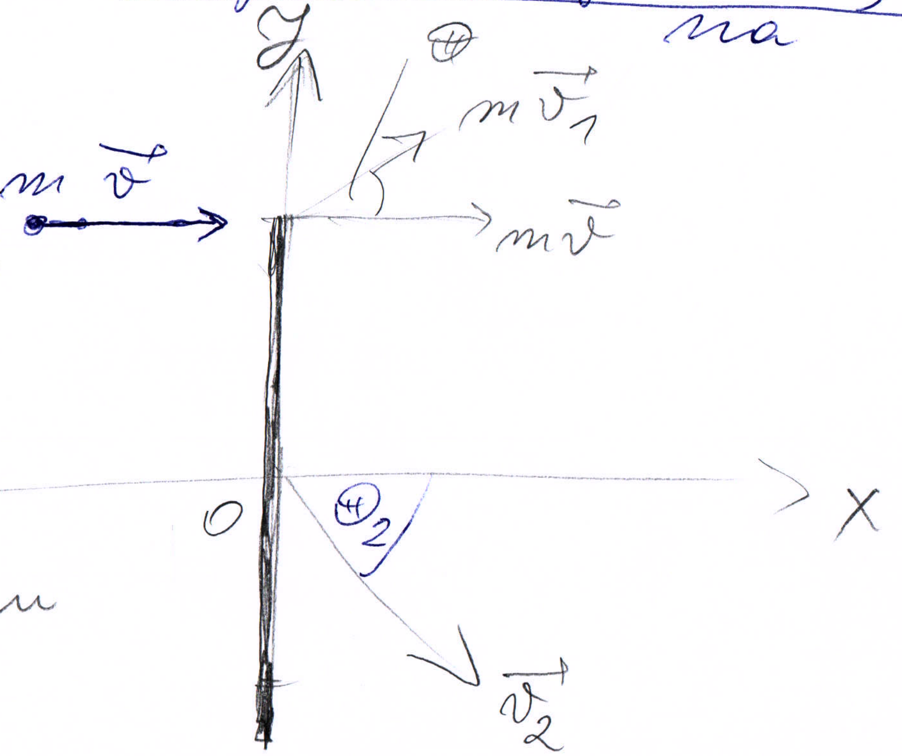
Elastyczne zderzenie pręta z punktową ma

$\vec{v}_1$ – prędkość punktowej masy po zderzeniu



$\vec{v}_2$ – prędkość środka ~~masy~~ pręta po zderzeniu

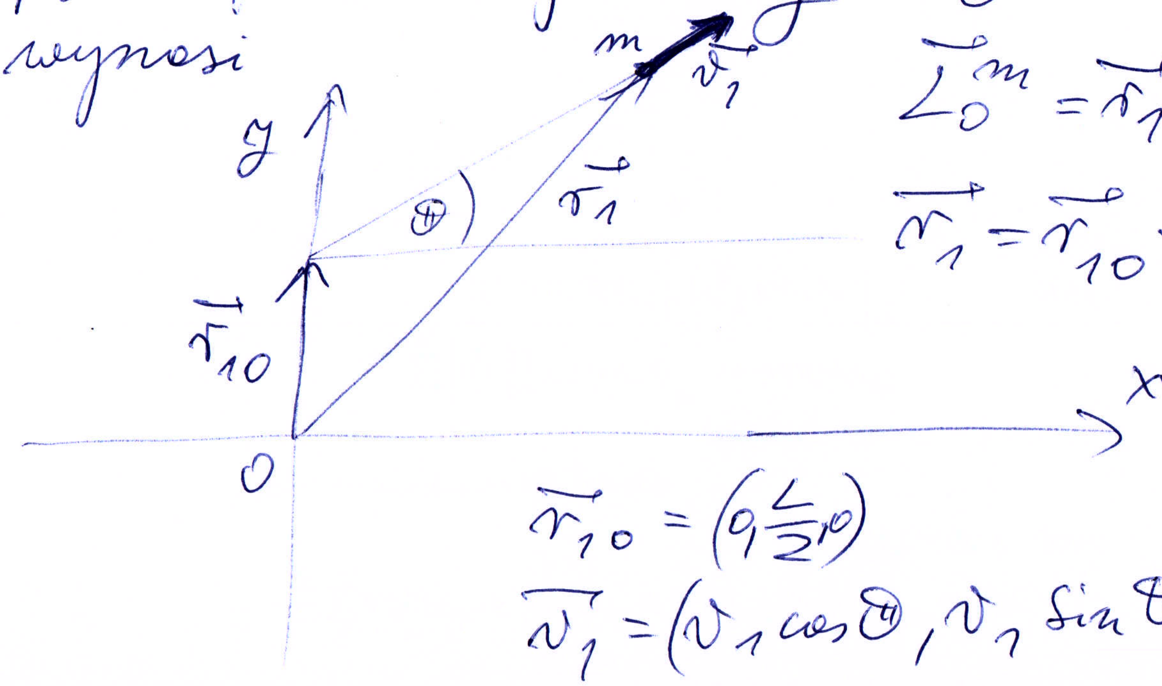
ω – prędkość kątowa pręta wokół jego środka masy po zderzeniu

W tym procesie zachowane są trzy wielkości: energia kinetyczna, pęd i moment pędu

Moment pędu liczymy względem nieruchomego początku układu współrzędnych.
Na początku pochodzi on od punktowej masy m

$$L_0 = \frac{m v L}{2}(-\hat{z})$$

w stanie końcowym moment pędu punktowej masy $\vec{L}_0^m$ wynosi



$$\vec{L}_0^m = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + t\vec{v}_1$$

$$\vec{r}_{10} = \left(0, \frac{L}{2}, 0\right)$$

$$\vec{v}_1 = (v_1 \cos\Theta, v_1 \sin\Theta, 0)$$

$$\vec{L}_0^m = \left(0, 0, -\frac{1}{2} L m v_1 \cos\Theta\right)$$

Ponieważ środek masy pręta porusza się od początku układu współrzędnych (z punktu O), ruch środka masy pręta nie daje wkładu do końcowego momentu pędu. ~~Prz~~ Wkład pręta pochodzi wyłącznie od ruchu względem jego środka masy

$$\vec{L}_0^M = -I_S \omega \hat{z}, \text{ gdzie } I_S = \frac{1}{12} M L^2$$

mamy więc następujące równania

$$\begin{cases} \dfrac{m\vartheta L}{2} = \dfrac{m\vartheta_1 L \cos \Theta}{2} + I_s \omega \quad \Big/ \dfrac{2}{L} \\ m\vec{\vartheta} = m\vec{\vartheta_1} + M\vec{\vartheta_2} \\ \dfrac{m\vec{\vartheta}^2}{2} = \dfrac{m\vec{\vartheta_1}^2}{2} + \dfrac{M\vec{\vartheta_2}^2}{2} + \dfrac{I_s\omega^2}{2} \end{cases}$$

Możemy to równoważnie zapisać w postaci

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos \Theta + \dfrac{2 I_s \omega}{L} \\ \vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \\ \dfrac{p_0^2}{2m} = \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2M} + \dfrac{I_s\omega^2}{2} \end{cases}$$

gdzie $p_0 = m\vartheta$, $p_1 = |\vec{p_1}| = m|\vec{\vartheta_1}| = m\vartheta_1$

$p_2 = M|\vec{\vartheta_2}| = M\vartheta_2$

$\vec{p_2} = \vec{p_0} - \vec{p_1}$

$\vec{p_2}^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos \Theta$

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \cos \Theta + \dfrac{2 I_s \omega}{L} \\ M p_0^2 = M p_1^2 + m(p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos \Theta) + mMI_s\omega^2 \end{cases}$$

Na stronie 3 dostaliśmy dla danego Θ układ równań na p_1 i ω.
Jak zwykle żądamy, by $p_1 > 0$.
W zależności od stosunku mas m i M mogą występować ograniczenia na kąt wylotu masy punktowej m.

Znajdując fizyczne rozwiązanie $p_1 = |\vec{p_1}|$ dla zadanego kąta Θ, znajdujemy długość pędu środka masy (p_2) i kąt wylotu środka masy (Θ_2):

$$\vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \quad \Big| \cdot \hat{p_0}$$

$$p_0 = p_1 \cos\Theta + p_2 \cos\Theta_2$$

$$\cos\Theta_2 = \frac{p_0 - p_1\cos\Theta}{p_2}, \text{ gdzie}$$

$$p_2 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 - 2 p_0 p_1 \cos\Theta}$$

rod3.nb