Fizyka dla Informatyki Stosowanej
Zestaw nr 1

0. Powtórzyć (przed ćwiczeniami !) podstawowe wiadomości o działaniach na wektorach i liczeniu pochodnych.

1. Udowodnić trzy spośród następujących tożsamości wektorowych, słusznych dla dowolnych wektorów $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ i $\vec{D}$:

   1. $(\vec{A} \times \vec{B})^2 + (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = (\vec{A})^2 (\vec{B})^2$
   2. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) =$
      $-\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$
   3. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$
   4. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$
   5. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot D) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot C)$
   6. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})]\, \vec{C} - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]\, \vec{D}$
   7. $\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = (\vec{B} \cdot \vec{D})(\vec{A} \times \vec{C}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \times \vec{D})$
   8. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot (\vec{A} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot (\vec{B} \times \vec{D}) = 0$

   Przeliczenia wykonać w układzie kartezjańskim. W przypadkach (3)–(8) wygodnie jest użyć tensora Levi-Civity, ale rachunek bezpośredni też jest oczywiście dopuszczalny. Tożsamość (3) będzie potrzebna na wykładzie.

2. Położenie punktu materialnego na osi x dane jest wzorem $x(t) = At - Bt^3$. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu w dowolnej chwili czasu, położenie punktu w chwili $t = 0$ oraz $t = 2$s, przemieszczenie punktu w dwóch pierwszych sekundach ruchu, prędkość średnią w dwóch pierwszych sekundach ruchu, drogę przebytą przez punkt w dwóch pierwszych sekundach ruchu. Przyjąć, że $A = 2\frac{m}{s}$, $B = 1\frac{m}{s^3}$.

3. Położenie punktu materialnego na osi x dane jest wzorem $x(t) = \frac{t}{At+B}$, gdzie A i B to dodatnie stałe. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu w dowolnej chwili czasu, maksymalną odległość, na jaką oddali się punkt od położenia początkowego, maksymalną prędkość punktu materialnego. Przyjąć, że $A = 5\frac{1}{m}$, $B = 1\frac{s}{m}$.

4. Położenie punktu materialnego w płaszczyźnie xy dane jest układem równań $x = b\,\sin(\omega t)$, $y = c\,\cos(2\omega t)$, gdzie b, c i ω to dodatnie stałe. Zbadać charakter ruchu tego punktu (czy ruch jest okresowy, czy jest ograniczony przestrzennie), znaleźć równanie toru, określić minimalną i maksymalną wartość długości wektora prędkości.

5. Położenie punktu materialnego w płaszczyźnie xy dane jest wzorami $x(t) = v_0 t$, $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ i $z(t) = 0$, gdzie $g \approx 10\frac{m}{s^2}$, $v_0 = 1\frac{m}{s}$, $h = 5m$. Jakiej sytuacji fizycznej to odpowiada ? Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu w dowolnej chwili t, położenie punktu w chwili $t = 0$ oraz $t = 1s$, przemieszczenie punktu w pierwszej sekundzie ruchu, prędkość średnią w pierwszej sekundzie ruchu. Podać wzór na drogę przebytą przez punkt w pierwszej sekundzie ruchu.

6. Wektory położenia dwóch punktów materialnych w płaszczyźnie xy dane są wzorami $\vec{r}_1(t) = (0,1)\,\mathrm{m} + \mathrm{t}(0,1)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \mathrm{t}^2(1,1)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $\vec{r}_2(t) = (3,0)\,\mathrm{m} + \mathrm{t}(-1,2)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \mathrm{t}^2(1,1)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Jak wygląda ruch drugiego punktu materialnego z punktu widzenia pierwszej cząstki ? Znaleźć prędkość $\vec{v}_{21}$ i przyspieszenie $\vec{a}_{21}$ drugiego punktu materialnego względem pierwszego. W jakiej chwili t odległość między punktami będzie najmniejsza i ile będzie wynosić ?

Jacek Golak