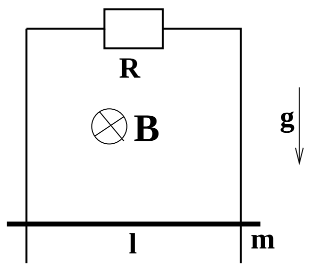
Fizyka dla Informatyki Stosowanej
Zestaw nr 9

1. Pokazać, że potencjał wektorowy $\vec{A}(\vec{r})$ dla jednorodnego pola $\vec{B}$ ma postać $\vec{A} = -\frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\vec{B}\right)$, gdzie $\vec{B} = \text{const}$. Dodatkowo sprawdzić, czy $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.

2. Spinowy ("własny") dipolowy moment magnetyczny protonu wynosi $m_{\text{prot}} \approx 1.4 \times 10^{-26}\, Cm^2/s$. Zakładając, że proton jest jednorodnie objętościowo naładowaną kulką o całkowitym ładunku Q i promieniu R, która obraca się wokół własnej osi symetrii z prędkością kątową ω i dlatego ma wypadkowy dipolowy moment magnetyczny $m = \frac{1}{5}\,\omega\, Q\, R^2$, policzyć prędkość liniową punktów na "równiku" kulki. Przyjąć następujące wartości:
   R= 1.4 $\times 10^{-15}\, m$ (promień protonu), Q= 1.6 $\times 10^{-19}\, C$ (ładunek protonu).

3. Dwie metalowe, równoległe i pionowo ustawione szyny są zwarte opornikiem R. Szyny połączono także ruchomą poprzeczką, która może się poruszać bez tarcia, nie tracąc kontaktu z szynami. Odległość pomiędzy szynami wynosi l, masa poprzeczki to m. Szyny znajdują się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ skierowanym prostopadle do płaszczyzny układu. Podać równanie różniczkowe na położenie spadającej poprzeczki.



4. Z równań Maxwella

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

   wyprowadzić równanie ciągłości (prawo zachowania ładunku)

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

5. Pokazać, że rozwiązaniem jednowymiarowego równania falowego

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

jest dowolna kombinacja liniowa $c_1 f_1(x - vt) + c_2 f_2(x + vt)$, gdzie funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ są dwukrotnie różniczkowalne. Jaki jest sens fizyczny obu składników ?

6. Równanie falowe w trzech wymiarach ma postać:

$$\Delta u(\vec{x},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Jaki musi być związek wielkościami ω, $\vec{k}$ i v, by $u(\vec{x},t) = f(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$, $(\vec{k} \neq 0)$ było rozwiązaniem tego równania ? Zakładamy, że funkcja jednej zmiennej $f(z)$ jest dwukrotnie różniczkowalna. Operator Laplace'a (laplasjan) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

7. Wyrażając laplasjan we współrzędnych sferycznych

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\ \cos\phi \\ y = r\sin\theta\ \sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases},$$

gdzie $r \geq 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, dostajemy

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}.$$

Pokazać, że wstawiając tę postać operatora Laplace'a do trójwymiarowego równania falowego, możemy zapisać rozwiązania niezależne od θ i ϕ w postaci $c_1\frac{1}{r}f_1(r - vt) + c_2\frac{1}{r}f_2(r + vt)$, gdzie funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ są dwukrotnie różniczkowalne. Jaki jest sens fizyczny obu składników ?

8. Początek struny znajduje się w punkcie $x = 0$, a koniec w punkcie $x = L$. Struna jest unieruchomiona na obu końcach. Ogólna forma fali stojącej jest dana wyrażeniem

$$u(x,t) = A(x)\ \cos(\omega t + \phi\,). \tag{1}$$

Wiedząc, że jest to rozwiązanie równania falowego z prędkości fazową v, znaleźć dopuszczalne przez warunki brzegowe częstotliwości drgań struny $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

9. Siła T_0 napinająca stalową strunę pianina w położeniu równowagi wynosi 443.8 N. Struna ma długość $L = 64\,\mathrm{cm}$, średnicę $d = 0.08$ cm i jest zbudowana ze stali o gęstości (objętościowej !) $\rho = 7.85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Znaleźć prędkość rozchodzenia się fali w strunie oraz (korzystając z wyników zadania poprzedniego) najniższą częstotliwość drgań własnych struny.

Jacek Golak