Narzędzia obliczeniowe fizyki
Zestaw nr 8

Rozwiązania wszystkich zadań mają się znaleźć w jednym notatniku programu *Mathematica*®, a nazwa notatnika ma mieć postać „Imie_Nazwisko_zad_08.nb” (bez polskich „ogonków”). Zadania należy przesłać wyłącznie w formie załącznika do maila na adres jacek.golak@uj.edu.pl najpóźniej we wtorek przed kolejnymi zajęciami. Po tym terminie zadania nie będą przyjmowane

Krzywa Γ zadana jest w postaci parametrycznej (taka „rozgięta” asteroida):

$$\vec{r}(u) \equiv (x(u), y(u), z(u)\,) = \left(\cos^3(u), \sin^3(u), \frac{u}{2\pi}\right)\,, u \in [0, 2\pi]\,.$$

1. Potraktować najpierw $\vec{r}(u)$ jak wektor położenia punktu materialnego, a parameter u jako czas t: $\vec{r}(u) \to \vec{r}(t)$. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w dowolnej chwili czasu. Znaleźć szybkość, czyli długość wektora prędkości. Dla jakich t szybkość przyjmuje wartości ekstremalne? Policzyć drogę, jaką punkt materialny pokona od chwili $t = 0$ do chwili $t = 6$.

2. Niech teraz równania parametryczne określają kształt drutu. Korzystając z notatnika *NOF_2024_11_28_krzywa.nb* i zakładając, że gęstość liniowa masy drutu λ jest stała, policzyć środek masy drutu i moment bezwładności drutu względem osi z. Następnie założyć, że gęstość liniowa masy nie jest stała, ale dana jest wzorem $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$. Dla tego przypadku znaleźć masę całkowitą drutu, środek masy drutu i moment bezwładności drutu względem osi z.

3. Następnie założyć, że równania parametryczne opisują naładowaną nić, dla której gęstość liniowa ładunku dana jest wzorem $\lambda(x, y, z) = x^2+y^2+z^4$. Policzyć potencjał elektryczny wytwarzany przez tę naładowaną nić w punkcie $\vec{r}_1 = (1, 2, 3)$.

4. Na koniec przyjmijmy, że energia potencjalna zadana jest w przestrzeni wzorem $E_p(x, y, z) = x^2 - xy + yz + 2y^2 + z^3$. Taka energia potencjalna daje siłę $\vec{F}\,(\vec{r}) = (-2x + y, x - 4y - z, -y - 3z^2\,)$.
   Korzystając z notatnika *NOF24-25/2024_11_28/praca_po_zadanej_krzywej_3D_v3.nb*, policzyć pracę, jaką siły zewnętrzne ($\vec{F}_{zew}\,(\vec{r}) = -\vec{F}\,(\vec{r})$) wykonują przy przejściu po krzywej, $W_{zew} = \int\limits_\Gamma \vec{F}\,(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Porównać tę pracę z różnicą energii potencjalnych na końcach trajektorii.

Jacek Golak