Wyznacznik macierzy kwadratowej

Niech A będzie macierzą stopnia n (czyli macierzą kwadratową n x n), o elementach A_{ik}. Utwórzmy iloczyn $A_{1\,\alpha_1}\,A_{2\,\alpha_2}\ldots A_{n\alpha_n}$, gdzie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ jest permutacją liczb {1, 2, ..., n}.
Ten iloczyn zawiera dokładnie jeden element każdego wiersza i każdej kolumny macierzy A.
Mnożymy go przez znak permutacji sgn($\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$) i tworzymy sumę po wszystkich permutacjach

$$\sum_{\substack{\text{wszystkie permutacje} \\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n}} \operatorname{sgn}(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)\ A_{1\,\alpha_1}\ A_{2\,\alpha_2}\ \ldots\ A_{n\alpha_n},$$

którą nazywamy wyznacznikiem macierzy A i oznaczamy Det(A).

Uwaga: zwykle liczymy wyznaczniki, korzystając z twierdzeń, a nie wprost z definicji.

Kluczowe w tej definicji jest zrozumienie, czym jest znak permutacji !
sgn $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$ to (-1)^(liczba przestawień w ciągu $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$, która daje w wyniku ciąg (1 2 ... n))

```
In[1]:= P4 = Permutations[{1, 2, 3, 4}]
              lista permutacji

Out[1]= {{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 4, 3}, {1, 3, 2, 4}, {1, 3, 4, 2}, {1, 4, 2, 3}, {1, 4, 3, 2},
  {2, 1, 3, 4}, {2, 1, 4, 3}, {2, 3, 1, 4}, {2, 3, 4, 1}, {2, 4, 1, 3}, {2, 4, 3, 1},
  {3, 1, 2, 4}, {3, 1, 4, 2}, {3, 2, 1, 4}, {3, 2, 4, 1}, {3, 4, 1, 2}, {3, 4, 2, 1},
  {4, 1, 2, 3}, {4, 1, 3, 2}, {4, 2, 1, 3}, {4, 2, 3, 1}, {4, 3, 1, 2}, {4, 3, 2, 1}}
```

Przykład permutacji nieparzystej:
sgn(4231) =(-1)^(liczba przestawień w ciągu (4,2,3,1), która daje ciąg (1,2,3,4). Widać, że wystarczy jedno przestawienie (1⟷4), bo od razu daje (1234).
Można rozważać także inne przestawienia, ale ich liczba będzie zawsze nieparzysta !
Na przykład:
najpierw (1⟷3) daje (4213),
potem (2⟷1) daje (4123),
potem (4⟷1) daje (1423),
potem (4⟷2) daje (1243),
potem (4⟷3) daje (1234)

```
In[2]:= sgn4231 = Signature[{4, 2, 3, 1}]
                  podpis

Out[2]= -1
```

Przykład permutacji parzystej
sgn(1342) = (-1)^(liczba przestawień w ciągu (1,3,4,2), która daje ciąg (1,2,3,4). Widać, że wystarczą dwa przestawienia:
najpierw (4⟷2) daje (1,3,2,4),
potem (3⟷2) daje (1,2,3,4).
Można rozważać także inne przestawienia, ale ich liczba będzie zawsze parzysta !

Na przykład:
najpierw (2⟷1) daje (2341),
potem (4⟷1) daje (2314),
potem (3⟷1) daje (2134),
potem (1⟷2) daje (1234)

In[3]:=
```
sgn1342 = Signature[{1, 3, 4, 2}]
```
podpis

Out[3]= 1

Macierz 1 x 1

In[4]:=
```
A1 = {{a11}}; MatrixForm[A1]
```
postać macierzy

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a11 \end{pmatrix}$$

In[5]:=
```
(* Dla jednego elementu mamy tylko permutację tożsamościową z zerową,
a więc parzystą liczbą przestawień ! *)
```

In[6]:=
```
Det[A1]
```
wyznacznik

Out[6]= a11

Macierz 2 x 2

In[7]:=
```
A2 = {{a11, a12}, {a21, a22}}; MatrixForm[A2]
```
postać macierzy

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$$

In[8]:=
```
(* Teraz mamy dwie permutacje: parzystą (12) i nieparzystą (21)*)
```

In[9]:=
```
Det[A2]
```
wyznacznik

Out[9]= -a12 a21 + a11 a22

Macierz 3 x 3

In[10]:=
```
A3 = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}}; MatrixForm[A3]
```
postać macierzy

Out[10]//MatrixForm=

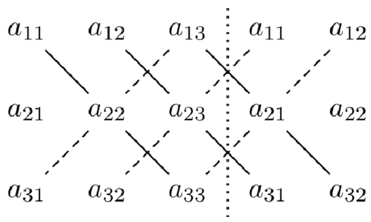
$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

In[11]:=
```
(* W tym przypadku spośród sześciu permutacji trzy są parzyste i trzy nieparzyste *)
```

In[12]:=
```
Det[A3]
```
wyznacznik

Out[12]=

-a13 a22 a31 + a12 a23 a31 + a13 a21 a32 - a11 a23 a32 - a12 a21 a33 + a11 a22 a33



(obrazek z Wikipedii dla tzw. schematu Sarrusa)

Macierz 4 x 4

In[13]:=
```
A4 = {{a11, a12, a13, a14}, {a21, a22, a23, a24},
   {a31, a32, a33, a34}, {a41, a42, a43, a44}};
MatrixForm[A4]
```
postać macierzy

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

In[14]:=
```
Det[A4]
```
wyznacznik

Out[14]=

a14 a23 a32 a41 - a13 a24 a32 a41 - a14 a22 a33 a41 + a12 a24 a33 a41 +
 a13 a22 a34 a41 - a12 a23 a34 a41 - a14 a23 a31 a42 + a13 a24 a31 a42 + a14 a21 a33 a42 -
 a11 a24 a33 a42 - a13 a21 a34 a42 + a11 a23 a34 a42 + a14 a22 a31 a43 - a12 a24 a31 a43 -
 a14 a21 a32 a43 + a11 a24 a32 a43 + a12 a21 a34 a43 - a11 a22 a34 a43 - a13 a22 a31 a44 +
 a12 a23 a31 a44 + a13 a21 a32 a44 - a11 a23 a32 a44 - a12 a21 a33 a44 + a11 a22 a33 a44

In[15]:=
```
(* Zwłaszcza ten ostatni wzór niełatwo zapamiętać i są
 prostsze sposoby liczenia wyznaczników dla większych macierzy. *)
```

Ostrzeżenie : nie istnieje schemat Sarrusa dla macierzy 4 x 4 !!!

In[16]:=
```
(* Spróbujmy teraz powtórzyć otrzymany powyżej wynik na Det[A4],
korzystając wprost z definicji -
 jest to bardzo dobre ćwiczenie z operacji na listach *)
```
wyznacznik

In[17]:=
```
P4
```

Out[17]=
```
{{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 4, 3}, {1, 3, 2, 4}, {1, 3, 4, 2}, {1, 4, 2, 3}, {1, 4, 3, 2},
 {2, 1, 3, 4}, {2, 1, 4, 3}, {2, 3, 1, 4}, {2, 3, 4, 1}, {2, 4, 1, 3}, {2, 4, 3, 1},
 {3, 1, 2, 4}, {3, 1, 4, 2}, {3, 2, 1, 4}, {3, 2, 4, 1}, {3, 4, 1, 2}, {3, 4, 2, 1},
 {4, 1, 2, 3}, {4, 1, 3, 2}, {4, 2, 1, 3}, {4, 2, 3, 1}, {4, 3, 1, 2}, {4, 3, 2, 1}}
```

In[18]:=
```
P4[[1]]
```

Out[18]=
```
{1, 2, 3, 4}
```

In[19]:=
```
P4[[1]][[1]]
```

Out[19]=
```
1
```

```
In[20]:= P4⟦1⟧⟦2⟧
Out[20]=
2

In[21]:= Signature[P4⟦1⟧]
         podpis
Out[21]=
1

In[22]:= Length[P4]
         długość
Out[22]=
24

In[23]:= MyDetA4 = Sum[Signature[P4⟦i⟧] * A4⟦1, P4⟦i⟧⟦1⟧⟧ *
                   s⋯   podpis
            A4⟦2, P4⟦i⟧⟦2⟧⟧ * A4⟦3, P4⟦i⟧⟦3⟧⟧ * A4⟦4, P4⟦i⟧⟦4⟧⟧, {i, 1, Length[P4]}]
                                                                    długość
Out[23]=
a14 a23 a32 a41 - a13 a24 a32 a41 - a14 a22 a33 a41 + a12 a24 a33 a41 +
 a13 a22 a34 a41 - a12 a23 a34 a41 - a14 a23 a31 a42 + a13 a24 a31 a42 + a14 a21 a33 a42 -
 a11 a24 a33 a42 - a13 a21 a34 a42 + a11 a23 a34 a42 + a14 a22 a31 a43 - a12 a24 a31 a43 -
 a14 a21 a32 a43 + a11 a24 a32 a43 + a12 a21 a34 a43 - a11 a22 a34 a43 - a13 a22 a31 a44 +
 a12 a23 a31 a44 + a13 a21 a32 a44 - a11 a23 a32 a44 - a12 a21 a33 a44 + a11 a22 a33 a44

In[24]:= Det[A4] == MyDetA4
         wyznacznik
Out[24]=
True
```

W przypadku konkretnych kwadratowych macierzy A i B mamy

```
In[25]:= A = {{1, 0, 3, 4}, {2, 4, -2, 8}, {1, 0, -4, 6}, {3, -7, 9, 1}}
Out[25]=
{{1, 0, 3, 4}, {2, 4, -2, 8}, {1, 0, -4, 6}, {3, -7, 9, 1}}

In[26]:= MatrixForm[A]
         postać macierzy
Out[26]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[27]:= B = {{-2, 1, 8, 0}, {7, 0, -2, 2}, {0, 1, 2, 3}, {2, 1, -9, 3}}
Out[27]=
{{-2, 1, 8, 0}, {7, 0, -2, 2}, {0, 1, 2, 3}, {2, 1, -9, 3}}

In[28]:= MatrixForm[B]
         postać macierzy
Out[28]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

In[29]:=
```
Det[A]
```
wyznacznik

Out[29]=
```
420
```

In[30]:=
```
Det[B]
```
wyznacznik

Out[30]=
```
-199
```

In[31]:=
```
(* Zachodzi ogólnie dla macierzy kwadratowych: Det[A.B]=
 Det[B.A]=Det[A]*Det[B]. Na przykład:  *)
```
wyznacznik wyznacznik wyzna··· wyznacznik

In[32]:=
```
Det[A.B]
```
wyznacznik

Out[32]=
```
-83 580
```

In[33]:=
```
Det[B.A]
```
wyznacznik

Out[33]=
```
-83 580
```

In[34]:=
```
Det[A] * Det[B]
```
wyznacz·· wyznaczr

Out[34]=
```
-83 580
```

Ślad (trace) macierzy kwadratowej: suma elementów na przekątnej macierzy

In[35]:=
```
Tr[A2]
```
ślad macierzy

Out[35]=
```
a11 + a22
```

In[36]:=
```
Tr[A3]
```
ślad macierzy

Out[36]=
```
a11 + a22 + a33
```

In[37]:=
```
Tr[A4]
```
ślad macierzy

Out[37]=
```
a11 + a22 + a33 + a44
```

W przypadku naszych kwadratowych macierzy A i B

In[38]:=
```
Tr[A]
```
ślad macierzy

Out[38]=
```
2
```

In[39]:=
```
Tr[B]
```
ślad macierzy

Out[39]=
3

In[40]:=
```
(* Zachodzi Tr[A.B]=Tr[B.A]. Na przykład: *)
```
ślad mac·· ślad macierzy

In[41]:=
```
Tr[A.B]
```
ślad macierzy

Out[41]=
-24

In[42]:=
```
Tr[B.A]
```
ślad macierzy

Out[42]=
-24

In[43]:=
```
H = A + I * B;
```
jednoś

In[44]:=
```
Tr[H]
```
ślad macierzy

Out[44]=
2 + 3 i

In[45]:=
```
(* Przypomnienie: sprzężenie hermitowskie *)
```

In[46]:=
```
G = ConjugateTranspose[H]
```
sprzężenie hermitowskie macie

Out[46]=
```
{{1 + 2 i, 2 - 7 i, 1, 3 - 2 i}, {-i, 4, -i, -7 - i},
 {3 - 8 i, -2 + 2 i, -4 - 2 i, 9 + 9 i}, {4, 8 - 2 i, 6 - 3 i, 1 - 3 i}}
```

In[47]:=
```
Tr[G]
```
ślad macierzy

Out[47]=
2 - 3 i

Szczególne przypadki macierzy

In[48]:=
```
(* macierz o rozmiarach m x n i wszystkich elementach identycznych  *)
```

In[49]:=
```
Cst = ConstantArray[3, {3, 5}]; MatrixForm[Cst]
```
stała tablica postać macierzy

Out[49]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

In[50]:=
```
(* Przy pomocy ConstantArray można
 zbudować zerową macierz kwadratową o rozmiarze n *)
```
stała tablica

In[51]:=
```
NullMatrix[n_] := ConstantArray[0, {n, n}]
```
stała tablica

```
In[52]:= Nm4 = NullMatrix[4]
Out[52]=
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

In[53]:= MatrixForm[Nm4]
         postać macierzy
Out[53]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[54]:=

In[55]:= (* macierz jednostkowa (identity matrix) *)

In[56]:= Id4 = IdentityMatrix[4]
               macierz jednostkowa
Out[56]=
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

In[57]:= MatrixForm[IdentityMatrix[4]]
         postać macie·· macierz jednostkowa
Out[57]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[58]:= (* Zachodzi *)

In[59]:= A4.Id4 == A4
Out[59]=
True

In[60]:= Id4.A4 == A4
Out[60]=
True

In[61]:= (* Macierz diagonalna zbudowana ze wskazanych elementów *)

In[62]:= Diag4 = DiagonalMatrix[{d11, d22, d33, d44}]
                 macierz diagonalna
Out[62]=
{{d11, 0, 0, 0}, {0, d22, 0, 0}, {0, 0, d33, 0}, {0, 0, 0, d44}}

In[63]:= MatrixForm[Diag4]
         postać macierzy
Out[63]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} d11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d44 \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna (inverse matrix) istnieje dla macierzy kwadratowej A o niezerowym wyznaczniku. Oznaczamy ją

symbolem A^{-1}. Z definicji zachodzi $A^{-1}.A=A.A^{-1}$=Id (macierz jednostkowa).

In[64]:=
```
Inverse[A2]
```
macierz odwrotna

Out[64]=

$$\left\{\left\{\frac{a22}{-a12\,a21+a11\,a22},-\frac{a12}{-a12\,a21+a11\,a22}\right\},\left\{-\frac{a21}{-a12\,a21+a11\,a22},\frac{a11}{-a12\,a21+a11\,a22}\right\}\right\}$$

In[65]:=
```
Inverse[A3]
```
macierz odwrotna

Out[65]=

$$\left\{\left\{\frac{-a23\,a32+a22\,a33}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{a13\,a32-a12\,a33}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{-a13\,a22+a12\,a23}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33}\right\},\left\{\frac{a23\,a31-a21\,a33}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{-a13\,a31+a11\,a33}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{a13\,a21-a11\,a23}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33}\right\},\left\{\frac{-a22\,a31+a21\,a32}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{a12\,a31-a11\,a32}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33},\frac{-a12\,a21+a11\,a22}{-a13\,a22\,a31+a12\,a23\,a31+a13\,a21\,a32-a11\,a23\,a32-a12\,a21\,a33+a11\,a22\,a33}\right\}\right\}$$

In[66]:=
```
InvA = Inverse[A]
```
macierz odwrot

Out[66]=

$$\left\{\left\{-\frac{31}{35},\frac{17}{30},-\frac{23}{105},\frac{34}{105}\right\},\left\{-\frac{3}{70},\frac{11}{60},-\frac{22}{105},-\frac{4}{105}\right\},\left\{\frac{8}{35},-\frac{1}{30},-\frac{11}{105},-\frac{2}{105}\right\},\left\{\frac{3}{10},-\frac{7}{60},\frac{2}{15},-\frac{1}{15}\right\}\right\}$$

In[67]:=
```
InvB = Inverse[B]
```
macierz odwrot

Out[67]=

$$\left\{\left\{\frac{22}{199},\frac{33}{199},-\frac{28}{199},\frac{6}{199}\right\},\left\{\frac{211}{199},\frac{18}{199},-\frac{160}{199},\frac{148}{199}\right\},\left\{\frac{4}{199},\frac{6}{199},\frac{13}{199},-\frac{17}{199}\right\},\left\{-\frac{73}{199},-\frac{10}{199},\frac{111}{199},-\frac{38}{199}\right\}\right\}$$

In[68]:=
```
MatrixForm[InvA.A]
postać macierzy
```
Out[68]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[69]:=
```
MatrixForm[A.InvA]
postać macierzy
```
Out[69]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[70]:=
```
MatrixForm[InvB.B]
postać macierzy
```
Out[70]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[71]:=
```
MatrixForm[B.InvB]
postać macierzy
```
Out[71]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[72]:=
```
(* Ilustracja twierdzenia o wyznaczniku macierzy
 odwrotnej: Jeśli istnieje macierz odwrotna A^(-1), to zachodzi
  Det[A^(-1)]=1/Det[A]
  wyznacznik     wyznacznik
 *)
```

In[73]:=
```
Det[Inverse[A]] == 1 / Det[A]
w···  macierz odwrotna   wyznaczr
```
Out[73]=

True

In[74]:=
```
Det[Inverse[B]] == 1 / Det[B]
w···  macierz odwrotna   wyznaczr
```
Out[74]=

True

In[75]:=
```
(* Ilustracja twierdzenia: Jeśli istnieją macierze odwrotne
   A^(-1) i B^(-1) (oczywiście o tych samych rozmiarach), to zachodzi
  (A.B)^(-1)= B^(-1).A^(-1)
 *)
```

In[76]:=
```
Simplify[Inverse[A.B] == Inverse[B].Inverse[A]]
uprość     macierz odwrotna   macierz odwr··  macierz odwrotn
```
Out[76]=

True

In[77]:=
```
MatrixForm[Inverse[A.B]]
```
postać macie·· macierz odwrotna

Out[77]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{51}{398} & \frac{75}{796} & -\frac{8}{199} & \frac{6}{199} \\ -\frac{6294}{6965} & \frac{1664}{2985} & -\frac{1417}{20895} & \frac{6386}{20895} \\ -\frac{83}{2786} & \frac{59}{2388} & -\frac{121}{4179} & \frac{41}{4179} \\ \frac{2767}{6965} & -\frac{637}{2985} & \frac{146}{20895} & -\frac{2398}{20895} \end{pmatrix}$$

In[78]:=
```
MatrixForm[Inverse[B].Inverse[A]]
```
postać macie·· macierz odwr·· macierz odwrotn

Out[78]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{51}{398} & \frac{75}{796} & -\frac{8}{199} & \frac{6}{199} \\ -\frac{6294}{6965} & \frac{1664}{2985} & -\frac{1417}{20895} & \frac{6386}{20895} \\ -\frac{83}{2786} & \frac{59}{2388} & -\frac{121}{4179} & \frac{41}{4179} \\ \frac{2767}{6965} & -\frac{637}{2985} & \frac{146}{20895} & -\frac{2398}{20895} \end{pmatrix}$$

In[79]:=
```
(* Poniżej pokazuję na przykładach macierzy A i B,
że dwie kolejne operacje (1) liczenia macierzy odwrotnej i (2)
 transponowania macierzy można wykonywać w dowolnej kolejności *)
```

In[80]:=
```
Inverse[Transpose[A]] == Transpose[Inverse[A]]
```
macierz··· transpozycja transpozycja macierz odwrotn

Out[80]=

True

In[81]:=
```
MatrixForm[Inverse[Transpose[A]]]
```
postać macie·· macierz··· transpozycja

Out[81]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{31}{35} & -\frac{3}{70} & \frac{8}{35} & \frac{3}{10} \\ \frac{17}{30} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{30} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{23}{105} & -\frac{22}{105} & -\frac{11}{105} & \frac{2}{15} \\ \frac{34}{105} & -\frac{4}{105} & -\frac{2}{105} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

In[82]:=
```
MatrixForm[Transpose[Inverse[A]]]
```
postać macie·· transpozycja macierz odwrotna

Out[82]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{31}{35} & -\frac{3}{70} & \frac{8}{35} & \frac{3}{10} \\ \frac{17}{30} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{30} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{23}{105} & -\frac{22}{105} & -\frac{11}{105} & \frac{2}{15} \\ \frac{34}{105} & -\frac{4}{105} & -\frac{2}{105} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

In[83]:=
```
Inverse[Transpose[B]] == Transpose[Inverse[B]]
```
macierz··· transpozycja transpozycja macierz odwrotn

Out[83]=

True

In[84]:=
```
MatrixForm[Inverse[Transpose[B]]]
```
postać macie·· macierz··· transpozycja

Out[84]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{22}{199} & \frac{211}{199} & \frac{4}{199} & -\frac{73}{199} \\ \frac{33}{199} & \frac{18}{199} & \frac{6}{199} & -\frac{10}{199} \\ -\frac{28}{199} & -\frac{160}{199} & \frac{13}{199} & \frac{111}{199} \\ \frac{6}{199} & \frac{148}{199} & -\frac{17}{199} & -\frac{38}{199} \end{pmatrix}$$

In[85]:=
```
MatrixForm[Transpose[Inverse[B]]]
```
postać macie·· transpozycja macierz odwrotna

Out[85]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{22}{199} & \frac{211}{199} & \frac{4}{199} & -\frac{73}{199} \\ \frac{33}{199} & \frac{18}{199} & \frac{6}{199} & -\frac{10}{199} \\ -\frac{28}{199} & -\frac{160}{199} & \frac{13}{199} & \frac{111}{199} \\ \frac{6}{199} & \frac{148}{199} & -\frac{17}{199} & -\frac{38}{199} \end{pmatrix}$$

Układy równań liniowych Cramera. Twierdzenie Cramera

Rozważmy układ n równań liniowych na n niewiadomych x1, x2, ..., xn. Układ taki można zapisać w postaci:

A11*x1 + A12*x2 + ... + A1n*xn = B1,
A21*x1 + A22*x2 + ... + A2n*xn = B2,
...
An1*x1 + An2*x2 + ... + Ann*xn = Bn.

Współczynniki Aik tworzą macierz kwadratową - tzw. macierz współczynników. Mówimy też o kolumnie wyrazów wolnych

$B=\begin{pmatrix} B1 \\ B2 \\ \ldots \\ Bn \end{pmatrix}$ oraz o kolumnie niewiadomych $X = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \ldots \\ Xn \end{pmatrix}$.

W postaci macierzowej układ równań można zapisać w postaci A.X = B.
Ten zapis jest absolutnie równoważny zapisowi stosowanemu powyżej (z jawnym układem równań, bo równość dwóch macierzy oznacza równość wszystkich odpowiadających sobie elementów macierzy.

Jeśli Det[A] jest różny od zera, to mamy do czynienia z układem Cramera.

Twierdzenie Cramera:
Układ równań z Det[A] różnym od zera ma jednoznaczne rozwiązanie, które możemy zapisać w postaci X= A^(-1).B

Równoważne sformułowanie (nieoczywiste bez znajomości liczenia macierzy odwrotnych):
Niewiadomą Xs otrzymujemy jako iloraz dwóch wyznaczników:
Xs=Det[As]/Det[A], gdzie
As jest macierzą A, w której s-ta kolumna została zastąpiona przez kolumnę wyrazów wolnych, czyli

B.

In[86]:= (* Przykład *)

In[87]:= A = {{2, 3, 1, -2, 1}, {3, -2, 4, -6, 2},
{7, 2, -1, -1, 3}, {6, 0, 1, -9, 4}, {5, -1, 2, -8, 5}}

Out[87]=
{{2, 3, 1, -2, 1}, {3, -2, 4, -6, 2},
{7, 2, -1, -1, 3}, {6, 0, 1, -9, 4}, {5, -1, 2, -8, 5}}

In[88]:= MatrixForm[A]
postać macierzy

Out[88]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -6 & 2 \\ 7 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

In[89]:= Det[A]
wyznacznik

Out[89]=
-975

In[90]:= (* Mamy układ Cramera ! *)

In[91]:= MatrixForm[A]
postać macierzy

Out[91]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -6 & 2 \\ 7 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

In[92]:= B = {{1}, {-2}, {-1}, {3}, {0}}

Out[92]=
{{1}, {-2}, {-1}, {3}, {0}}

In[93]:= MatrixForm[B]
postać macierzy

Out[93]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[94]:= X = {{X1}, {X2}, {X3}, {X4}, {X5}}

Out[94]=
{{X1}, {X2}, {X3}, {X4}, {X5}}

In[95]:=
```
MatrixForm[X]
```
postać macierzy

Out[95]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}$$

In[96]:=
```
ukladrownan = A.Flatten[X] == Flatten[B]
```
spłaszcz spłaszcz

Out[96]=

$$\{2\,X1+3\,X2+X3-2\,X4+X5,\ 3\,X1-2\,X2+4\,X3-6\,X4+2\,X5,\ 7\,X1+2\,X2-X3-X4+3\,X5,\ 6\,X1+X3-9\,X4+4\,X5,\ 5\,X1-X2+2\,X3-8\,X4+5\,X5\} == \{1,-2,-1,3,0\}$$

In[97]:=
```
Flatten[X]
```
spłaszcz

Out[97]=
```
{X1, X2, X3, X4, X5}
```

In[98]:=
```
Flatten[B]
```
spłaszcz

Out[98]=
```
{1, -2, -1, 3, 0}
```

In[99]:=
```
Solve[ukladrownan, Flatten[X]]
```
rozwiąż równanie spłaszcz

Out[99]=

$$\left\{\left\{X1\to-\frac{274}{975},\ X2\to\frac{32}{65},\ X3\to-\frac{367}{325},\ X4\to-\frac{934}{975},\ X5\to-\frac{228}{325}\right\}\right\}$$

In[100]:=
```
(* Flatten[B] i Flatten[X] "spłaszcza" wielowymiarowe
 listy do postaci prostych list jednowymiarowych *)
```
spłaszcz spłaszcz

In[101]:=
```
(* Nie ma potrzeby samemu tworzyć układ równań
 i rozwiązywać go przy pomocy ogólnej instrukci Solve,
bo mamy narzędzie bardziej specjalistyczne; LinearSolve,
gdzie podajemy jako argumenty macierz współczynników oraz kolumnę wyrazów wolnych. *)
```
rozwiąż równanie

rozwiąż układ równań liniowych

In[102]:=
```
LinearSolve[A, B]
```
rozwiąż układ równań liniowych

Out[102]=

$$\left\{\left\{-\frac{274}{975}\right\},\ \left\{\frac{32}{65}\right\},\ \left\{-\frac{367}{325}\right\},\ \left\{-\frac{934}{975}\right\},\ \left\{-\frac{228}{325}\right\}\right\}$$

In[103]:=
```
(* Oczywiście możemy też użyć macierzy odwrotnej do A *)
```

In[104]:=

```
Inverse[A].B
```

macierz odwrotna

Out[104]=

$$\left\{\left\{-\frac{274}{975}\right\}, \left\{\frac{32}{65}\right\}, \left\{-\frac{367}{325}\right\}, \left\{-\frac{934}{975}\right\}, \left\{-\frac{228}{325}\right\}\right\}$$

Rząd macierzy

Rozważmy macierz A o m wierszach i n kolumnach. Jeśli wykreślić m-k wierszy i n-k kolumn to pozostanie z niej macierz kwadratowa stopnia k (k x k). Wyznacznik z tej macierzy nazywamy minorem stopnia k wyjętym z macierzy A. Jeśli istnieje różny od zera minor stopnia r wyjęty z macierzy A, a wszystkie minory stopnia r+1 są równe zero, to mówimy, że macierz A jest rzędu r i piszemy Rank[A]= r.

Twierdzenia, które zilustrujemy na ćwiczeniach.
Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:
(1) pomnożyć dowolną kolumnę przez liczbę rożną od zera
(2) do elementów jednej kolumny dodać odpowiednie elementy innej kolumny pomnożone przez jakąś stałą
(3) przestawić kolumny
(4) transponować macierz

In[105]:=

```
A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {0, 0, 0}}
```

Out[105]=

```
{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {0, 0, 0}}
```

In[106]:=

```
MatrixForm[A]
```

postać macierzy

Out[106]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[107]:=

```
AA = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}
```

Out[107]=

```
{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}
```

In[108]:=

```
MatrixForm[AA]
```

postać macierzy

Out[108]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

In[109]:=

```
Det[AA]
```

wyznacznik

Out[109]=

```
0
```

In[110]:=
```
AAA = {{1, 2}, {4, 5}}
```
Out[110]=
```
{{1, 2}, {4, 5}}
```
In[111]:=
```
MatrixForm[AAA]
```
postać macierzy

Out[111]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

In[112]:=
```
Det[AAA]
```
wyznacznik

Out[112]=
```
-3
```
In[113]:=
```
(* Dlatego ... *)
```
In[114]:=
```
MatrixRank[A]
```
rząd macierzy

Out[114]=
```
2
```
Mamy do dyspozycji użyteczną instrukcję,
RowReduce[A],
która daje uproszczoną (tzw. zredukowaną) macierz o tym samym rzędzie co macierz A.

In[115]:=
```
MatrixForm[RowReduce[A]]
```
postać macie·· redukcja rzędu mac

Out[115]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[116]:=
```
(* Po wykonaniu tej instrukcji widać,
że z macierzy A nie da się wykroić macierzy kwadratowej o
 niezerowym wyznaczniku dla rozmiaru macierzy większego od 2 *)
```
Ale uwaga !!!

In[117]:=
```
B = {{1, 1, b}, {1, 1, 1}, {1, 2, 1}}
```
Out[117]=
```
{{1, 1, b}, {1, 1, 1}, {1, 2, 1}}
```
In[118]:=
```
MatrixForm[B]
```
postać macierzy

Out[118]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In[119]:=

```
Det[B]
```

wyznacznik

Out[119]=

$-1+b$

In[120]:=

```
MatrixRank[B]
```

rząd macierzy

Out[120]=

3

To jest niepoprawny wynik !!!

Wynik poprawny to:

rz(B)=3, jeśli $b \neq 1$,

rz(B)=2, jeśli $b = 1$.

In[121]:=

Twierdzenie Kroneckera-Capelli'ego.

Dotyczy ono najogólniejszego układu m równań na n niewiadomych x1, x2, ..., xn. Układ taki można zapisać w postaci:
A11*x1 + A12*x2 + ... + A1n*xn = B1,
A21*x1 + A22*x2 + ... + A2n*xn = B2,
...
Am1*x1 + Am2*x2 + ... + Amn*xn = Bm.

Współczynniki Aik tworzą macierz (niekoniecznie kwadratową) - tzw. macierz współczynników.
Mówimy też o kolumnie wyrazów wolnych

B= $\begin{pmatrix} \text{B1} \\ \text{B2} \\ \dots \\ \text{Bm} \end{pmatrix}$ oraz o kolumnie niewiadomych X = $\begin{pmatrix} \text{X1} \\ \text{X2} \\ \dots \\ \text{Xn} \end{pmatrix}$.

W postaci macierzowej układ równań można zapisać w postaci:
A.X = B.

Dalej tworzymy macierz DAB przez dołączenie do macierzy A kolumny wyrazów wolnych, B.

Twierdzenie mówi, że rozwiązanie układu A.X=B istnieje tylko wtedy, gdy Rank[A]=Rank[DAB].
Ponadto, gdy Rank[A]=Rank[DAB]=n (liczba niewiadomych), to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie; gdy Rank[A]=Rank[DAB] =r < n, to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od n-r parametrów.

In[122]:=

```
(* Przykład 1: zadanie 3.2a z książki Henryka Arodzia
   i Krzysztofa Rościszewskiego,
Algebra i geometria analityczna w zadaniach, Wydawnictwo Znak, Kraków, 2005
  ⎧ 2x1+x2+x3+x4+x5    =1,
  ⎨ -x1-x2+x3-x4+x5    =3,                *)
  ⎩ 0x1-x2+3x3-x4+3x5  =7.
```

In[123]:=

```
A = {{2, 1, 1, 1, 1}, {-1, -1, 1, -1, 1}, {0, -1, 3, -1, 3}}
```

Out[123]=

```
{{2, 1, 1, 1, 1}, {-1, -1, 1, -1, 1}, {0, -1, 3, -1, 3}}
```

In[124]:=

```
B = {1, 3, 7}
```

Out[124]=

```
{1, 3, 7}
```

In[125]:=

```
MatrixForm[A]
```

postać macierzy

Out[125]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

In[126]:=

```
DAB = {{2, 1, 1, 1, 1, 1}, {-1, -1, 1, -1, 1, 3}, {0, -1, 3, -1, 3, 7}}
```

Out[126]=

```
{{2, 1, 1, 1, 1, 1}, {-1, -1, 1, -1, 1, 3}, {0, -1, 3, -1, 3, 7}}
```

In[127]:=

```
MatrixForm[DAB]
```

postać macierzy

Out[127]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

In[128]:=

```
rA = MatrixRank[A]
```

rząd macierzy

Out[128]=

2

In[129]:=

```
rDAB = MatrixRank[DAB]
```

rząd macierzy

Out[129]=

2

In[130]:=

```
(* rA=rDAB, więc układ ma rozwiązanie zależne od (5-2=3) parametrów. *)
```

In[131]:=

```
MatrixForm[RowReduce[A]]
```

postać macie·· redukcja rzędu mac

Out[131]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[132]:=

```
(* Jako nieosobliwy minor możemy wybrać macierz 2 x 2 z lewego
  górnego rogu A i sprowadzić nasz układ do następującej postaci:

   ⎧ 2x1+x2  = 1-x3-x4-x5,
   ⎩ -x1-x2  = 3-x3+x4-x5.

    Stąd ostatecznie dostaniemy

    x1=4-2*x3-2*x5
    x2=-7+3*x3-x4+3*x5
*)
```

In[133]:=

```
x1 = 4 - 2 * x3 - 2 * x5 (* to dostałem, dodając dwa równania stronai *)
```

Out[133]=

4 - 2 x3 - 2 x5

In[134]:=
```
x2 = Simplify[1 - x3 - x4 - x5 - 2 * x1] (* liczę x2 z pierwszego równania *)
      uprość
```
Out[134]=
$$-7 + 3\,x3 - x4 + 3\,x5$$

In[135]:=
```
(* Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie na x1
 i x2 (zalezne od x3, x4 i x5) spełnia układ równań *)
```
In[136]:=
```
Simplify[2 x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == 1]
uprość
```
Out[136]=
True

In[137]:=
```
Simplify[-x1 - x2 + x3 - x4 + x5 == 3]
uprość
```
Out[137]=
True

In[138]:=
```
Simplify[0 * x1 - x2 + 3 * x3 - x4 + 3 * x5 == 7]
uprość
```
Out[138]=
True

In[139]:=
```
(* Teraz sformułujemy układ równań i zobaczymy,
jak komendy programu Mathematica sobie z nim poradzą *)
```
In[140]:=
```
Clear[x1, x2, x3, x4, x5];
wyczyść
```
In[141]:=
```
ukladKC = A.{x1, x2, x3, x4, x5} == B
```
Out[141]=
$$\{2\,x1 + x2 + x3 + x4 + x5,\ -x1 - x2 + x3 - x4 + x5,\ -x2 + 3\,x3 - x4 + 3\,x5\} == \{1, 3, 7\}$$

In[142]:=
```
(* Co daje komenda Solve dla naszego układu ? *)
                   rozwiąż równanie
```
In[143]:=
```
Solve[{2 x1 + x2 + x3 + x4 + x5, -x1 - x2 + x3 - x4 + x5, -x2 + 3 x3 - x4 + 3 x5} == {1, 3, 7},
rozwiąż równanie
 {x1, x2, x3, x4, x5}]
```
Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[143]=
$$\left\{\left\{x4 \to -1 - \frac{3\,x1}{2} - x2,\ x5 \to 2 - \frac{x1}{2} - x3\right\}\right\}$$

In[144]:=
```
(* Dostaliśmy rozwiązanie na x4 i x5 zależne od x1, x2 i x3, co wygląda rozsądnie. *)
```
In[145]:=
$$x4 = -1 - \frac{3\,x1}{2} - x2;\ x5 = 2 - \frac{x1}{2} - x3;$$

In[146]:=
```
(* Sprawdzamy, czy to rozwiązanie na x4 i x5,
uzyskane przy pomocy Solve i zalezne od x1, x2 i x3, spełnia układ równań *)
```
rozwiąż równanie

In[147]:=
```
Simplify[2 x1 + x2 + x3 + x4 + x5 == 1]
```
uprość

Out[147]=
```
True
```

In[148]:=
```
Simplify[-x1 - x2 + x3 - x4 + x5 == 3]
```
uprość

Out[148]=
```
True
```

In[149]:=
```
Simplify[0 * x1 - x2 + 3 * x3 - x4 + 3 * x5 == 7]
```
uprość

Out[149]=
```
True
```

In[150]:=
```
Solve[
 {2 x1 + x2 + x3 + x4 + x5, -x1 - x2 + x3 - x4 + x5, -x2 + 3 x3 - x4 + 3 x5} == {1, 3, 7}, {x1, x2}]
```
rozwiąż równanie

Out[150]=
```
{{}}
```

In[151]:=
```
(* A co daje LinearSolve ? *)
```
rozwiąż układ równań lir

In[152]:=
```
LinearSolve[A, B]
```
rozwiąż układ równań liniowych

Out[152]=
```
{4, -7, 0, 0, 0}
```

In[153]:=
```
(* Na pewno nie jest to pełne rozwiązanie ! *)
```

Zobaczmy jeszcze na zakończenie, jak działa twierdzenie, w przypadku układu, który nie posiada rozwiązania, czyli układu sprzecznego

In[154]:=
```
(* Przykład 2: "z głowy" *)
```

In[155]:=
```
Clear[DAB, X, x1, x2, x3, x4, x5, ukladKC, rA, rDAB];
```
wyczyść

In[156]:=
```
A = {{1, 2, 3}, {1, 2, 3}, {3, 1, -1}}
```

Out[156]=
```
{{1, 2, 3}, {1, 2, 3}, {3, 1, -1}}
```

In[157]:=
```
MatrixForm[A]
```
postać macierzy

Out[157]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In[158]:=
```
B = {1, 2, 0}
```
Out[158]=
```
{1, 2, 0}
```
In[159]:=
```
MatrixForm[B]
```
postać macierzy

Out[159]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[160]:=
```
DAB = {{1, 2, 3, 1}, {1, 2, 3, 2}, {3, 1, -1, 0}}
```
Out[160]=
```
{{1, 2, 3, 1}, {1, 2, 3, 2}, {3, 1, -1, 0}}
```
In[161]:=
```
MatrixForm[DAB]
```
postać macierzy

Out[161]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[162]:=
```
MatrixRank[A]
```
rząd macierzy

Out[162]=
```
2
```
In[163]:=
```
MatrixRank[DAB]
```
rząd macierzy

Out[163]=
```
3
```
In[164]:=
```
ukladKC = A.{x1, x2, x3} == B
```
Out[164]=
```
{x1 + 2 x2 + 3 x3, x1 + 2 x2 + 3 x3, 3 x1 + x2 - x3} == {1, 2, 0}
```
In[165]:=
```
Solve[ukladKC, {x1, x2, x3}]
```
rozwiąż równanie

Out[165]=
```
{}
```
In[166]:=
```
(* czyli Solve nie znalazł żadnego rozwiązania *)
```
rozwiąż równanie

In[167]:=

```
LinearSolve[A, B]
```

rozwiąż układ równań liniowych

LinearSolve: Linear equation encountered that has no solution.

Out[167]=

```
LinearSolve[{{1, 2, 3}, {1, 2, 3}, {3, 1, -1}}, {1, 2, 0}]
```

In[168]:=

```
(* To jest poprawny wynik ! *)
```

Problem własny

Jeśli zachodzi

$$A.X = \lambda X,$$

to znaczy

$$\begin{pmatrix} A11 & A12 & \ldots & A1n \\ A21 & A22 & \ldots & A2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ An1 & An2 & \ldots & Ann \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \ldots \\ Xn \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \ldots \\ Xn \end{pmatrix}$$

dla pewnej liczby λ i wektora X= $\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \ldots \\ Xn \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$,

to liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy A,
a wektor X nazywamy wektorem własnym macierzy A związanym z wartością własną λ.

Składowe wektora własnego można uważać za rozwiązanie liniowego i jednorodnego układu n równań na n niewiadomych

$$(A - \lambda I_d). X = 0,$$

gdzie I_d jest macierzą jednostkową (identity matrix) n x n.

Z twierdzenia Kroneckera-Capelli'ego wynika, że taki układ może mieć niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Det}[(A - \lambda I_d)] = 0.$$

Równanie to nazywamy charakterystycznym (lub wiekowym), a wielomian charakterystyczny dla zmiennej λ stanowi lewą stronę tego równania.

In[169]:=

```
(* Przykład 1: macierz 2 x 2  *)
```

In[170]:=
```
Clear[X, n];
```
wyczyść

In[171]:=
```
A = {{0, 1}, {1, 0}}
```
Out[171]=
```
{{0, 1}, {1, 0}}
```

In[172]:=
```
MatrixForm[A]
```
postać macierzy

Out[172]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[173]:=
```
Id2 = IdentityMatrix[2]
```
macierz jednostkowa

Out[173]=
```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

In[174]:=
```
Det[A - λ * Id2]
```
wyznacznik

Out[174]=
$-1 + \lambda^2$

In[175]:=
```
(* To jest wielomian charakterystyczny (wiekowy) *)
```

In[176]:=
```
rch = Det[A - λ * Id2] == 0
```
wyznacznik

Out[176]=
$-1 + \lambda^2 == 0$

In[177]:=
```
(* To jest równanie charakterystyczne na λ *)
```

In[178]:=
```
Solve[rch, λ]
```
rozwiąż równanie

Out[178]=
$\{\{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to 1\}\}$

In[179]:=
```
(* Mamy dwie wartości własne i możemy poszukać
 "ręcznie" wektorów własnych z nimi związanych *)
```

In[180]:=
```
(* λ=1 *)
```

In[181]:=
```
Solve[A.{x1, x2} == {x1, x2}, {x1, x2}]
```
rozwiąż równanie

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[181]=
```
{{x2 → x1}}
```

In[182]:=

```
(* Rozwiązanie nie może być i nie jest jednoznaczne; oznacza ono,
że każdy wektor postaci {x1,x1} jest wektorem własnym A do wartości własnej 1 *)
```

In[183]:=

```
A.{x1, x1} == {x1, x1}
```

Out[183]=

```
True
```

In[184]:=

```
(* λ= -1 *)
```

In[185]:=

```
Solve[A.{x1, x2} == -{x1, x2}, {x1, x2}]
```

rozwiąż równanie

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[185]=

```
{{x2 → -x1}}
```

In[186]:=

```
(* Rozwiązanie oznacza,
że każdy wektor postaci {x1,-x1} jest wektorem własnym A do wartości własnej -1 *)
```

In[187]:=

```
A.{x1, -x1} == -{x1, -x1}
```

Out[187]=

```
True
```

In[188]:=

```
(* Oczywiście Mathematica może wszystko to
 za nas zrobić sama. Oto kilka użytecznych komend: *)
```

In[189]:=

```
(* Wielomian charakterystyczny A w zmiennej λ *)
```

In[190]:=

```
CharacteristicPolynomial[A, λ]
```

wielomian charakterystyczny

Out[190]=

$-1 + \lambda^2$

In[191]:=

```
(* Wartości własne macierzy A *)
```

In[192]:=

```
Eigenvalues[A]
```

wartości własne macierzy

Out[192]=

```
{-1, 1}
```

In[193]:=

```
(* Wektory własne macierzy A *)
```

In[194]:=

```
Eigenvectors[A]
```

wektory własne

Out[194]=

```
{{-1, 1}, {1, 1}}
```

In[195]:=

```
(* Mathematica podaje mozliwie najprostszą postać wektora własnego. Jest jasne,
ze jeśli X jest wektorem własnym, to także c*X jest wektorem własnym,
gdzie c jest dowolną liczbą różną od zera. *)
```

In[196]:=

```
(* Dwie powyższe komendy można zebrać w jedną:  Eigensystem *)
                                                wartości i wektory wła
```

In[197]:=

```
pw = Eigensystem[A]
     wartości i wektory wła
```

Out[197]=

```
{{-1, 1}, {{-1, 1}, {1, 1}}}
```

In[198]:=

```
pw[[1]] (* lista wartości własnych *)
```

Out[198]=

```
{-1, 1}
```

In[199]:=

```
nww = Length[pw[[1]]]
      długość
```

Out[199]=

```
2
```

In[200]:=

```
pw[[2]] (* lista wektorów własnych *)
```

Out[200]=

```
{{-1, 1}, {1, 1}}
```

In[201]:=

```
Do[Print[A.pw[[2]][[i]] == pw[[1]][[i]] * pw[[2]][[i]]], {i, 1, nww}]
rób drukuj
True
True
```

In[202]:=

```
(* Czyli równanie własne jest spełnione dla obu wartości własnych macierzy A*)
```

In[203]:=

Diagonalizacja macierzy

Dla niediagonalnej macierzy A szukamy takiej nieosobliwej macierzy U, by zachodziło

$$U^{-1} A\, U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv D.$$ Znalezienie takiej macierzy U

ogromnie ułatwia policzenie A^n dla dużych wartości n. Zachodzi bowiem

$A = U\,D\,U^{-1}$, więc $A^n = \left(U\,D\,U^{-1}\right)^n = U\,D\,U^{-1}\;U\,D\,U^{-1}\;\ldots\;U\,D\,U^{-1}\;U\,D\,U^{-1}$ =

$U\,D^n\,U^{-1}$, a liczenie D^n jest bardzo proste. (Dlaczego ?)

Przypadek ogólny diagonalizacji

Twierdzenie: Macierz stopnia n można zdiagonalizować wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona n liniowo niezależnych wektorów własnych. Nie oznacza to, że wszystkie wartości własne macierzy muszą być różne, bo nawet w tym przypadku można niekiedy znaleźć niezależne liniowo wektory! Z takich wektorów własnych budujemy macierz U (kolumna obok kolumny). Zachodzi wtedy

$$U^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi (niekoniecznie różnymi) macierzy A.

Uwaga: wektory własne, z których tworzymy macierz U nie muszą być unormowane.

In[204]:=

```
(* ClearAll["Global`*"]  *)
```

wyczyść wszystko

In[205]:=

```
(* Przykład 2: macierz 3 x 3, która ma trzy różne wartości własne.

   H. Arodź, K. Rościszewski, Algebra i geometria analityczna w zadaniach, Wydawnictwo Znak, Kraków 2006 *)
```

In[206]:=

```
A = {{1, 1, 1 }, {0, 2, 2 }, {0, 0, 3}}
```

Out[206]=

```
{{1, 1, 1}, {0, 2, 2}, {0, 0, 3}}
```

In[207]:=

```
MatrixForm[A]
```

postać macierzy

Out[207]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

In[208]:=
```
pw = Eigensystem[A]
```
wartości i wektory wła

Out[208]=
```
{{3, 2, 1}, {{3, 4, 2}, {1, 1, 0}, {1, 0, 0}}}
```

In[209]:=
```
Um = Array[U, {3, 3}];
```
tablica wielowymiarowa

In[210]:=
```
Um⟦All, 1⟧ = pw⟦2⟧⟦1⟧
```
wszystko

Out[210]=
```
{3, 4, 2}
```

In[211]:=
```
(* Nie musimy normować wektorów własnych *)
```

In[212]:=
```
Um⟦All, 2⟧ = pw⟦2⟧⟦2⟧
```
wszystko

Out[212]=
```
{1, 1, 0}
```

In[213]:=
```
Um⟦All, 3⟧ = pw⟦2⟧⟦3⟧
```
wszystko

Out[213]=
```
{1, 0, 0}
```

In[214]:=
```
MatrixForm[Simplify[Inverse[Um].A.Um]]
```
postać macie·· uprość macierz odwrotna

Out[214]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[215]:=

In[216]:=
```
(* ClearAll["Global`*"] *)
```
wyczyść wszystko

In[217]:=
```
(* Przykład 3: macierz 3 x 3, która ma podwójną wartość własną
```
http://en.wikipedia.org/wiki/Diagonalizable_matrix#Diagonalization
```
*)
```

In[218]:=
```
A = {{-1, 3, -1 }, {-3, 5, -1 }, {-3, 3, 1}}
{{-1, 3, -1}, {-3, 5, -1}, {-3, 3, 1}}
```
Out[218]=
```
{{-1, 3, -1}, {-3, 5, -1}, {-3, 3, 1}}
```
Out[219]=
```
{{-1, 3, -1}, {-3, 5, -1}, {-3, 3, 1}}
```
In[220]:=
```
MatrixForm[A]
postać macierzy
```
Out[220]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

In[221]:=
```
pw = Eigensystem[A]
     wartości i wektory wła
```
Out[221]=
```
{{2, 2, 1}, {{-1, 0, 3}, {1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}
```
In[222]:=
```
Um = Array[U, {3, 3}];
     tablica wielowymiarowa
```
In[223]:=
```
Um[[All, 1]] = pw[[2]] [[1]]
   wszystko
```
Out[223]=
```
{-1, 0, 3}
```
In[224]:=
```
(* Nie musimy normować wektorów własnych *)
```
In[225]:=
```
Um[[All, 2]] = pw[[2]] [[2]]
   wszystko
```
Out[225]=
```
{1, 1, 0}
```
In[226]:=
```
Um[[All, 3]] = pw[[2]] [[3]]
   wszystko
```
Out[226]=
```
{1, 1, 1}
```
In[227]:=
```
MatrixForm[Simplify[Inverse[Um].A.Um]]
postać macie·· uprość    macierz odwrotna
```
Out[227]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[228]:=

Czy rzeczywistą macierz diagonalizuje zawsze macierz rzeczywista?

In[229]:=

```
(* ClearAll["Global`*"]  *)
```

wyczyść wszystko

In[230]:=

```
(* Przykład 4: macierz 2 x 2,
którą nie da się zdiagonalizować przy pomocy rzeczywistej
  macierzy. Trzeba użyć macierzy zespolonej !

  http://en.wikipedia.org/wiki/Diagonalizable_matrix#Diagonalization
*)
```

In[231]:=

```
A = {{0, 1}, {-1, 0}}
```

Out[231]=

```
{{0, 1}, {-1, 0}}
```

In[232]:=

```
MatrixForm[A]
```

postać macierzy

Out[232]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[233]:=

```
pw = Eigensystem[A]
```

wartości i wektory wła

Out[233]=

```
{{i, -i}, {{-i, 1}, {i, 1}}}
```

In[234]:=

```
Um = Array[U, {2, 2}];
```

tablica wielowymiarowa

In[235]:=

```
Um[[All, 1]] = pw[[2]][[1]]
```

wszystko

Out[235]=

```
{-i, 1}
```

In[236]:=

```
(* Nie musimy normować wektorów własnych *)
```

In[237]:=

```
Um[[All, 2]] = pw[[2]][[2]]
```

wszystko

Out[237]=

```
{i, 1}
```

In[238]:=

```
MatrixForm[Um]
postać macierzy
```

Out[238]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

In[239]:=

```
(* Macierz diagonalizująca macierz rzeczywistą jest zespolona *)
```

In[240]:=

```
MatrixForm[Simplify[Inverse[Um].A.Um]]
postać macie·· uprość  macierz odwrotna
```

Out[240]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

In[241]:=

```
(* Macierz A ma dwa liniowo niezależne wektory własne,
więc dała się jej zdiagonalizować !  *)
```

In[242]:=

Czy wszystkie macierze można zdiagonalizować ?

In[243]:=

```
(* ClearAll["Global`*"]  *)
   wyczyść wszystko
```

In[244]:=

```
(* Przykład 5: macierz, której nie da się zdiagonalizować.

   http://en.wikipedia.org/wiki/Diagonalizable_matrix#Diagonalization
*)
```

In[245]:=

```
A = {{0, 1}, {0, 0}}
```

Out[245]=

```
{{0, 1}, {0, 0}}
```

In[246]:=

```
MatrixForm[A]
postać macierzy
```

Out[246]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[247]:=

```
pw = Eigensystem[A]
     wartości i wektory wła
```

Out[247]=

```
{{0, 0}, {{1, 0}, {0, 0}}}
```

In[248]:=

```
Um = Array[U, {2, 2}];
     tablica wielowymiarowa
```

In[249]:=
```
Um[[All, 1]] = pw[[2]][[1]]
```
wszystko

Out[249]=
```
{1, 0}
```

In[250]:=
```
Um[[All, 2]] = pw[[2]][[2]]
```
wszystko

Out[250]=
```
{0, 0}
```

In[251]:=
```
MatrixForm[Simplify[Inverse[Um].A.Um]]
```
postać macie·· uprość macierz odwrotna

Inverse: Matrix {{1, 0}, {0, 0}} is singular.

Out[251]//MatrixForm=
```
{{1, 0}, {0, 0}}^-1.{{0, 0}, {0, 0}}
```

In[252]:=
```
(* Ta macierz nie ma dwóch liniowo niezależnych wektorów własnych,
więc nie da się jej zdiagonalizować !  *)
```

In[253]:=

Macierze hermitowskie (symetryczne)

Przypomnienie: macierze hermitowskie to takie macierze, które jednoczesna operacja transpozycji i sprzężenia zespolonego (czyli sprzężenie hermitowskie) pozostawia bez zmiany. Rzeczywista macierz hermitowska jest macierzą symetryczną.

Macierze hermitowskie grają bardzo ważną role w fizyce kwantowej!

Przytoczę najprostszą postać twierdzenia, którego ogólna postać przedstawiana jest na wykładzie z algebry.

Zakładamy, że hermitowska macierz A ($A=A^{\dagger}$) o wymiarach n x n ma n różnych wartości własnych $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Niech wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będą odpowiednimi wektorami własnymi. Można pokazać, że wszystkie wartości własne są rzeczywiste oraz że zachodzi

$$v_k^{\dagger}\, v_i = 0 \text{ dla } i \neq k,$$

czyli iloczyn skalarny dwóch różnych wektorów własnych jest równy zero. Załóżmy jeszcze, że każdy wektor jest unormowany do jedności:

$$v_i^{\dagger}\, v_i = 1\ .$$

Z takich wektorów własnych budujemy macierz U (kolumna obok kolumny). Zachodzi wtedy

$$U^{\dagger} \, A \, U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In[254]:=
```
(* ClearAll["Global`*"]  *)
    wyczyść wszystko
```

In[255]:=
```
(* Przykład 6: macierz hermitowska 2 x 2 *)
```

In[256]:=
```
A = {{0, I}, {-I, 0}}
          jedn⋯  jedność ı
```

Out[256]=
```
{{0, i}, {-i, 0}}
```

In[257]:=
```
MatrixForm[A]
postać macierzy
```

Out[257]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

In[258]:=
```
pw = Eigensystem[A]
     wartości i wektory wła
```

Out[258]=
```
{{-1, 1}, {{-i, 1}, {i, 1}}}
```

In[259]:=
```
Um = Array[U, {2, 2}]
     tablica wielowymiarowa
```

Out[259]=
```
{{U[1, 1], U[1, 2]}, {U[2, 1], U[2, 2]}}
```

In[260]:=
```
v1 = Normalize[pw[[2]][[1]]]
     znormalizuj
```

Out[260]=

$$\left\{-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

In[261]:=
```
v2 = Normalize[pw[[2]][[2]]]
     znormalizuj
```

Out[261]=

$$\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

In[262]:=

```
MatrixForm[v1]
postać macierzy
```

Out[262]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In[263]:=

```
MatrixForm[v2]
postać macierzy
```

Out[263]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In[264]:=

```
Um[[All, 1]] = v1
     wszystko
```

Out[264]=

$$\left\{-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

In[265]:=

```
Um[[All, 2]] = v2
     wszystko
```

Out[265]=

$$\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

In[266]:=

```
MatrixForm[Um]
postać macierzy
```

Out[266]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In[267]:=

```
MatrixForm[ConjugateTranspose[Um].A.Um]
postać macie·· sprzężenie hermitowskie macierzy
```

Out[267]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[268]:=

In[269]:=

```
(* ClearAll["Global`*"]  *)
   wyczyść wszystko
```

In[270]:=

```
(* Przykład 7: macierz hermitowska 3 x 3 *)
```

In[271]:=

```
A = {{1, 0, 1 - I}, {0, 1, 3}, {1 + I, 3, 2}}
```

jedność urojona jedność uroj

Out[271]=

$\{\{1, 0, 1 - i\}, \{0, 1, 3\}, \{1 + i, 3, 2\}\}$

In[272]:=

```
MatrixForm[A]
```

postać macierzy

Out[272]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - i \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 + i & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In[273]:=

```
pw = Eigensystem[A]
```

wartości i wektory wła

Out[273]=

$$\left\{\left\{\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), -\frac{3}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right), 1\right\}, \left\{\left\{\frac{2-2 i}{1+3\sqrt{5}}, \frac{6}{1+3\sqrt{5}}, 1\right\}, \left\{-\frac{2-2 i}{-1+3\sqrt{5}}, -\frac{6}{-1+3\sqrt{5}}, 1\right\}, \{-3+3 i, 2, 0\}\right\}\right\}$$

In[274]:=

```
nww = Length[pw[[1]]]
```

długość

Out[274]=

3

In[275]:=

```
Do[Print[A.pw[[2]][[i]] == pw[[1]][[i]] * pw[[2]][[i]]], {i, 1, nww}]
```

rób drukuj

True

True

True

In[276]:=

```
Um = Array[U, {3, 3}]
```

tablica wielowymiarowa

Out[276]=

{{U[1, 1], U[1, 2], U[1, 3]}, {U[2, 1], U[2, 2], U[2, 3]}, {U[3, 1], U[3, 2], U[3, 3]}}

In[277]:=

```
v1 = Normalize[pw[[2]][[1]]]
```

znormalizuj

Out[277]=

$$\left\{\frac{2-2 i}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}}, \frac{6}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}}\right\}$$

In[278]:=

```
v2 = Normalize[pw[[2]][[2]]]
```

znormalizuj

Out[278]=

$$\left\{-\frac{2-2 i}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}}, -\frac{6}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}}\right\}$$

In[279]:=

```
v3 = Normalize[pw[[2]][[3]]]
```

znormalizuj

Out[279]=

$$\left\{-\frac{3-3\,i}{\sqrt{22}},\ \sqrt{\frac{2}{11}},\ 0\right\}$$

In[280]:=

```
Simplify[Conjugate[v1].v1]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[280]=

1

In[281]:=

```
Simplify[Conjugate[v2].v1]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[281]=

0

In[282]:=

```
Simplify[Conjugate[v3].v1]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[282]=

0

In[283]:=

```
Simplify[Conjugate[v1].v2]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[283]=

0

In[284]:=

```
Simplify[Conjugate[v2].v2]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[284]=

1

In[285]:=

```
Simplify[Conjugate[v3].v2]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[285]=

0

In[286]:=

```
Simplify[Conjugate[v1].v3]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[286]=

0

In[287]:=

```
Simplify[Conjugate[v2].v3]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[287]=

0

In[288]:=

```
Simplify[Conjugate[v3].v3]
```

uprość sprzężenie zespolone

Out[288]=

$$1$$

In[289]:=

```
MatrixForm[v1]
```

postać macierzy

```
MatrixForm[v2]
```

postać macierzy

```
MatrixForm[v3]
```

postać macierzy

Out[289]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{2-2\,i}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \\ \frac{6}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \end{pmatrix}$$

Out[290]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{2-2\,i}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \\ -\frac{6}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}} \end{pmatrix}$$

Out[291]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{3-3\,i}{\sqrt{22}} \\ \sqrt{\frac{2}{11}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[292]:=

```
Um[[All, 1]] = v1
```

wszystko

Out[292]=

$$\left\{\frac{2-2\,i}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}},\ \frac{6}{\left(1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}},\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}}}\right\}$$

In[293]:=

```
Um[[All, 2]] = v2
```

wszystko

Out[293]=

$$\left\{-\frac{2-2\,i}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}},\ -\frac{6}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}},\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{44}{\left(-1+3\sqrt{5}\right)^2}}}\right\}$$

In[294]:=

```
Um[[All, 3]] = v3
```

wszystko

Out[294]=

$$\left\{-\frac{3-3\,i}{\sqrt{22}},\ \sqrt{\frac{2}{11}},\ 0\right\}$$

In[295]:=

```
MatrixForm[Simplify[Um.ConjugateTranspose[Um]]]
```

postać macie·· uprość sprzężenie hermitowskie macierzy

Out[295]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[296]:=

```
(* To oznacza, że macierz U jest unitarna ! *)
```

In[297]:=

```
pw[[1]]
```

Out[297]=

$$\left\{\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), -\frac{3}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right), 1\right\}$$

In[298]:=

```
MatrixForm[Simplify[ConjugateTranspose[Um].A.Um]]
```

postać macie·· uprość sprzężenie hermitowskie macierzy

Out[298]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$