

# Sformułowanie Lagrange'a dynamiki układu punktów materialnych

Położenie układu  $N$  punktów materialnych w przestrzeni wymaga określenia  $N$  wektorów wodzących, tzn.  $3N$  współrzędnych. Liczba *niezależnych* wielkości, których znajomość jest niezbędna do jednoznacznego określenia położenia układu jest nazywana liczbą stopni swobody układu. Oznaczmy ją przez  $s$ . Współzrzednymi uogólnionymi nazywamy  $s$  dowolnych wielkości  $q_1, q_2, \dots, q_s$  charakteryzujących całkowicie położenia składowych układu o  $s$  stopniach swobody. Pochodne tych wielkości,  $\dot{q}_i \equiv \frac{d}{dt}q_i$ , noszą nazwę prędkości uogólnionych.

W myśl tzw. zasady najmniejszego działania (inaczej zasady Hamiltona) każdy układ mechaniczny jest określony przez pewną funkcję

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \equiv L(q, \dot{q}, t),$$

którą nazywamy funkcją Lagrange'a danego układu. Niech w chwilach  $t = t_1$  i  $t = t_2$  układ posiada położenia scharakteryzowane przez dwa zbiory wartości współrzędnych  $q^{(1)}$  i  $q^{(2)}$ . Pomiedzy tymi położeniami układ porusza się tak, że całka (tzw. działanie układu)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość. Ten warunek prowadzi do równań ruchu układu, czyli równań Lagrange'a-Eulera:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Funkcja Lagrange'a nie jest określona jednoznacznie: Dwie funkcje Lagrange'a różniące się o zupełną pochodną czasową dowolnej funkcji  $\frac{d}{dt}f(q, t)$  prowadzą do tych samych równań ruchu.

Z tego, co zostało dotychczas powiedziane, nie wynika, jak szukać funkcji Lagrange'a dla konkretnego układu. Nie ma na to jednej reguły. Można próbować różnych przepisów na  $L(q, \dot{q}, t)$  i badać, czy prowadzą do równań ruchu prawidłowo opisujących ewolucję układu w czasie.

Dla pewnych sytuacji wiemy jednak, jaką postać powinna mieć funkcja Lagrange'a.

- W przypadku ruchu jednej cząstki w zewnętrznym polu ogólna postać funkcji Lagrange'a jest dana wzorem

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r}, t), \quad (3)$$

gdzie  $U(\vec{r}, t)$  jest energią potencjalną.

- Dla odosobnionego układu  $N$  punktów materialnych oddziałujących ze sobą i nie oddziałujących z zewnętrznymi ciałami postuluje się, że

$$L = \sum_a^N \frac{1}{2}m_a\vec{v}_a^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

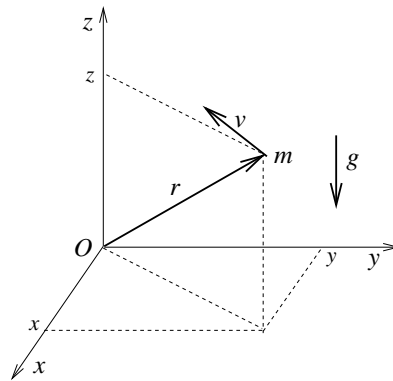
- Dla układów mechanicznych, w których oddziaływanie między ciałami narzuca ograniczenia na wzajemne położenie ciał (tzw. więzy), przy czym tarcie posuwiste w układzie jest tak małe, że nie wpływa w istotny sposób na ruch i można zaniedbać masy elementów wiążących układ, używamy tej samej funkcji Lagrange'a, co w poprzednim przypadku. Występowanie więzów prowadzi jedynie do zmniejszenia liczby stopni swobody.
- Dla układów mechanicznych z punktowymi masami oraz bryłami sztywnymi, w których występuje tarcie, ale ze względu na brak poślizgu siły tarcia nie zmieniają całkowitej energii mechanicznej układu. Energia kinetyczna, oprócz energii kinetycznej ruchu postępowego, musi uwzględniać także energie kinetyczne ruchu obrotowego brył sztywnych będących składowymi układu.

Uwaga:

Dla układów, w których następuje dysypacja energii mechanicznej formalizm Lagrange'a nie ma bezpośrednio zastosowania. Można jednak w pewnych wypadkach uogólnić równania Lagrange'a wprowadzając tzw. funkcje dysypacji Rayleigha.

Nie zawsze jednak energia układu musi być stała. Możliwe są układy z tzw. więzami reonomicznymi (inaczej niestacjonarnymi), czyli jawnie zależnymi od czasu, w których równania więzów nie zależą explicite od składowych wektora prędkości (więzy holonomiczne). Dla takich układów formalizm Lagrange'a ma jak najbardziej zastosowanie.

Przykład 1: ruch cząstki w jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym



Układ ma oczywiście trzy stopnie swobody:  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Energia kinetyczna punktu materialnego  $T$  wynosi

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (4)$$

a energia potencjalna  $U$  w jednorodnym ziemskim polu grawitacji zależy tylko od  $z$  i dana jest wzorem

$$U = mgz. \quad (5)$$

Dlatego funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz, \quad (6)$$

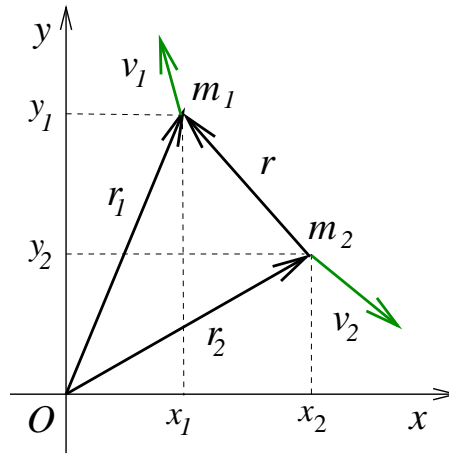
co prowadzi do następującego układu równań

$$m\ddot{x} = 0 \quad (7)$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad (8)$$

$$m\ddot{z} = -mg. \quad (9)$$

Przykład 2: dwie masy oddziałujące grawitacyjnie



Zakładamy, że obie masy poruszają się w płaszczyźnie  $xy$ . Układ ma wówczas cztery stopnie swobody:  $x_1, y_1, x_2$  i  $y_2$ . Energia kinetyczna  $T$  układu wynosi

$$T = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (10)$$

a energia potencjalna  $U$  grawitacji zależy tylko od długości wektora  $\vec{r}$  i dana jest wzorem

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|} = -G \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \quad (11)$$

Dlatego funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + G \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \quad (12)$$

co prowadzi do następującego układu równań

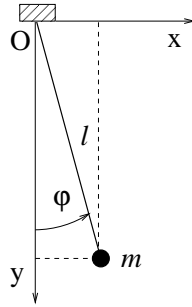
$$\ddot{x}_1 = -\frac{G m_2 (x_1 - x_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} \quad (13)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{G m_2 (x_1 - x_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} \quad (14)$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{G m_2 (y_1 - y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} \quad (15)$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{G m_2 (y_1 - y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} \quad (16)$$

### Przykład 3: wahadło matematyczne



Wahadło matematyczne to układ o jednym stopniu swobody, bo położenie układu określone jest przez kąt  $\varphi$ :

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi. \quad (17)$$

Energia kinetyczna wahadła  $T$  wynosi

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad (18)$$

a energia potencjalna  $U$  w jednorodnym ziemskim polu grawitacji dana jest wzorem

$$U = -mgy = -mgl \cos \varphi. \quad (19)$$

Dlatego funkcja Lagrange'a ma postać

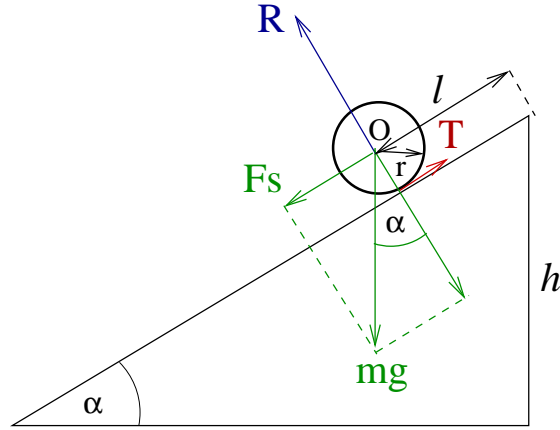
$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi, \quad (20)$$

co prowadzi do następującego równania ruchu wahadła

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (21)$$

czyli

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (22)$$



Przykład 4: staczanie się walca bez poślizgu z nieruchomej równi pochyłej

Przy założeniu, że oś symetrii znajdującego się na równi walca jest stale prostopadła do płaszczyzny rysunku, jego położenie można opisać dwoma parametrami: na przykład odległością  $l$  środka masy walca od górnego krańca równi oraz kątem  $\varphi$ , o jaki walec obróci się wokół własnej osi względem wybranego położenia początkowego. Jednak warunek, że toczenie odbywa się bez poślizgu prowadzi do związku między  $l$  i  $\varphi$

$$l = r\varphi.$$

Dlatego mamy do czynienia z układem o jednym stopniu swobody. Energia kinetyczna walca  $T$  jest sumą energii kinetycznej ruchu postępowego  $T_1$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 \quad (23)$$

oraz energii kinetycznej ruchu obrotowego  $T_2$  względem osi symetrii przechodzącej przez środek masy walca  $O$  ( $I_o$  jest momentem bezwładności walca względem tej osi)

$$T_2 = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}I_o\left(\frac{\dot{l}}{r}\right)^2. \quad (24)$$

Energia potencjalna  $U$  w jednorodnym ziemskim polu grawitacji dana jest wzorem (tak jak dla masy punktowej  $m$  umieszczonej w punkcie  $O$ )

$$U = mgy_o = mg(h - l\sin\alpha). \quad (25)$$

Dlatego funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}I_o\left(\frac{\dot{l}}{r}\right)^2 + mgl\sin\alpha, \quad (26)$$

(opuszczam stałą  $mgh$ ) co prowadzi do następującego równania na  $l(t)$

$$\ddot{l} = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_o/r^2}. \quad (27)$$

## Równania kanoniczne Hamiltona

W formalizmie Lagrange'a ruch układu  $N$  punktów materialnych opisywaliśmy w  $3N$  wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej, ewentualnie zawężonej do  $s$  wymiarów w wyniku nałożenia odpowiednich więzów i przejściu do współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami. W tej przestrzeni prędkości uogólnione nie są traktowane jak zmienne niezależne, bo znajomość zbioru funkcji  $q(t)$  pozwala wyznaczyć zbiór  $\dot{q}(t)$  przez różniczkowanie. Ruch układu w tej przestrzeni opisuje  $s$  równań różniczkowych drugiego rzędu. Przez wybrany punkt tej przestrzeni może przechodzić nieskończenie wiele trajektorii odpowiadających różnym wartościom prędkości początkowej.

Podejście Hamiltona polega na wprowadzeniu  $2s$ -wymiarowej *przestrzeni fazowej*, w której współrzędnymi są nie tylko współrzędne uogólnione, ale także pędy uogólnione  $p_i$

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

traktowane jako *niezależne* wielkości dynamiczne. Ruch układu w przestrzeni fazowej opisuje  $2s$  równań różniczkowych pierwszego rzędu na  $q_i$  i  $p_i$ . Przez wybrany punkt tej przestrzeni przechodzi tylko jedna trajektoria, a więc trajektorie nie mogą się przecinać.

Aby powiązać formalizm Hamiltona z wcześniej naszkicowanym podejściem Lagrange'a wyrażamy najpierw wszystkie prędkości uogólnione  $\dot{q}_i$  przez współrzędne  $q_i$  i pędy uogólnione  $p_i$ :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$$

Funkcją Hamiltona (hamiltonianem) nazywamy wielkość

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}_i(q, p, t), t). \quad (28)$$

Wariacja tej funkcji obliczona na dwa sposoby prowadzi do tzw. równań kanonicznych Hamiltona. Z jednej strony mamy wprost

$$\delta H = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right). \quad (29)$$

Z drugiej strony, korzystając z (28) zachodzi

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{i=1}^s \left( \delta \dot{q}_i p_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^s \left( \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^s (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Porównując (29) i (30) dostajemy

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (31)$$

## Przykład: oscylator anharmoniczny

Zakładamy, że hamiltonian układu ma postać

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}k_1q^2 + \frac{1}{4}k_2q^4. \quad (32)$$

Prowadzi to do następujących równań Hamiltona

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (33)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k_1q - k_2q^3 \quad (34)$$

Literatura:

1. L. Landau i E. Lifszic, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1966.
2. G. Białkowski, *Mechanika klasyczna*, PWN, Warszawa 1975.