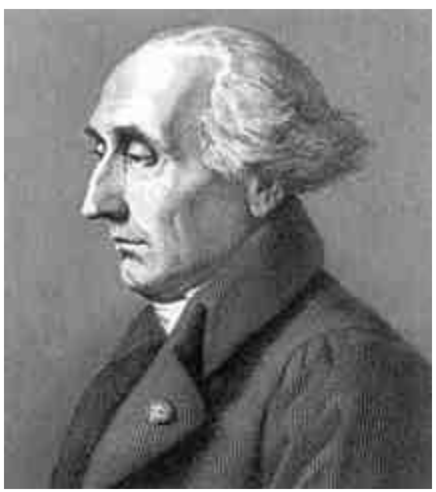
Elementy formalizmu Lagrange'a

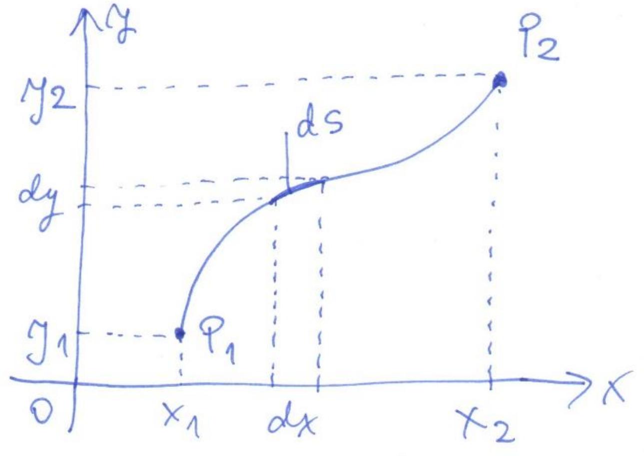
Wiemy, że przy pomocy równań Newtona możemy (w zasadzie) przewidzieć, jak będzie wyglądać ruch układu punktów materialnych, jeśli znamy wszystkie działające siły i warunki początkowe.

Na tym wykładzie będziemy zajmować się elementami **formalizmu Lagrange'a** czyli innego sformułowania dynamiki, którego autorem jest włosko-francuski astronom i matematyk Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Wśród wielu osiągnięć tego człowieka należy wymienić przede wszystkim stworzenie podstaw rachunku wariacyjnego.



W zagadnieniach wariacyjnych szukamy funkcji, dla której całka (zwana funkcjonałem) przyjmuje wartość ekstremalną.

Przykład:
Jakim wzorem powinna być dana **najkrótsza** krzywa łącząca na płaszczyźnie xy dwa ustalone punkty $P_1(x_1,y_1)$ i $P_2(x_2,y_2)$?



$$S(y)=\int_{x_1}^{x_2} ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2} dx\underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}_{\mathcal{L}(y,y',x)}$$

Funkcja *y* musi spełniać warunek **dany równaniem Lagrange'a-Eulera**

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'}\right)$$

W naszym przypadku zachodzi:

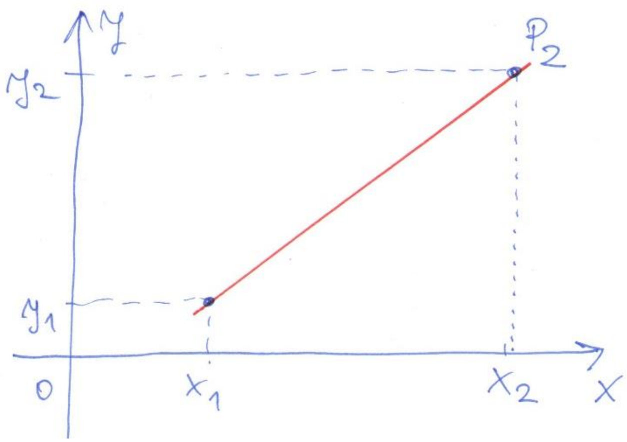
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'}\right)=\frac{y''}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3}$$

Dlatego dostajemy po prostu:

$$\frac{y''}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3} = 0 \rightarrow y'' = 0,$$

co oznacza, że $y(x) = ax + b,$

gdzie $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oraz $b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$



W mechanice Lagrange’a zasadniczą rolę odgrywa funkcjonał zwany **działaniem**:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)\, dt \quad \left(\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}\right),$$

który jest zdefiniowany dla ruchu układu, opisanego funkcjami $q_i(t)$, trwającego od chwili t_1 do chwili t_2 . Działanie jest więc funkcjonałem ruchu. Funkcjonał jest odwzorowaniem, w którym rolę zmiennej niezależnej pełni funkcja lub zbiór funkcji (przy danym zapisie jest to s funkcji $q_i(t)$), a wartością odwzorowania jest wartość całki oznaczonej z funkcji Lagrange’a, wykonanej po ustalonym przedziale czasu (t_1,t_2).

s jest minimalną liczbą parametrów potrzebnych do opisu położenia wszystkich elementów układu. Nazywamy ją liczbą stopni swobody układu. Funkcje $q_i(t)$, wybierane *z uwzględnieniem więzów* do opisu stanu układu, nazywamy współrzędnymi uogólnionymi. Ich pochodne po czasie to tzw. prędkości uogólnione.

Twierdzenie, które podaję bez dowodu, mówi, że funkcja Lagrange'a (lagrangian) dana jest wzorem:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t) \\
&= E_{kin}(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t) \\
&- E_{pot}(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)\ ,
\end{aligned}
$$

czyli jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej układu.

Z zasady najmniejszego działania (ściślej z żądania, by całka działania przyjmowała wartość ekstremalną) wynika, że funkcje $q_i(t)$, spełniają układ równań Lagrange'a-Eulera:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right), \qquad i = 1, 2, ..., \mathrm{s}.
$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{s}.$$

Te równania nazywamy równaniami Lagrange'a (mówiąc ściślej równaniami Lagrange'a II rodzaju, bo są jeszcze równania Lagrange'a I rodzaju). Jest to układ s równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na s funkcji $q_i(t)$.

Rozwiązania tych równań zależą więc od 2s stałych, które są wyznaczone przez uogólnione położenia początkowe $q_i(t=0)$ oraz uogólnione prędkości początkowe $dq_i/dt(t=0)$.

Przekonamy się na konkretnych przykładach, że podejście Lagrange'a posiada istotne zalety w tych przypadkach, gdy możemy zaniedbać straty energii mechanicznej na skutek działania sił tarcia :

- Równania Lagrange'a mają tę samą postać, niezależnie od wyboru układu współrzędnych. W podejściu Newtona jest inaczej: Nawet dla pojedynczego punktu materialnego II zasada dynamiki ma inną postać we współrzędnych kartezjańskich, we współrzędnych walcowych i we współrzędnych sferycznych.
- Pozwalają całkowicie wyeliminować siły reakcji więzów. Siły reakcji więzów nie zawsze łatwo jest znaleźć, a często nie jesteśmy nimi bezpośrednio zainteresowani, gdy ważna jest dla nas informacja o ruchu układu. Przykład: ruch koralika bez tarcia po drucie o zadanym kształcie.
- Daje łatwiejszy wgląd w wielkości zachowane: Jeśli na przykład zachodzi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = const\,,$$

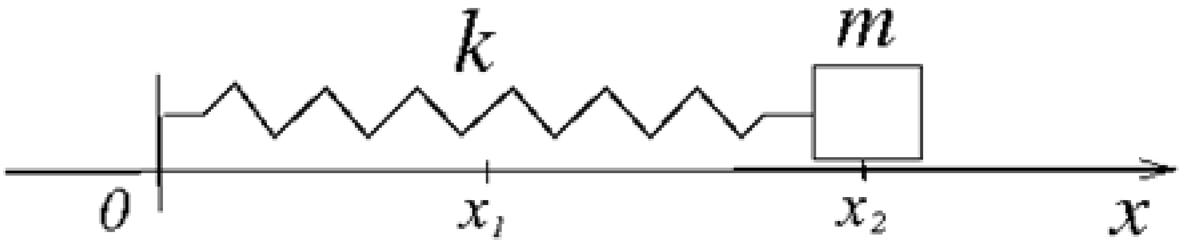
to taką współrzędną q_i nazywamy współrzędną cykliczną.

Polecam Państwu moje krótkie wprowadzenie
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/lagrange.pdf

oraz opracowanie doktora Sławomira Brzezowskiego dotyczące mechaniki teoretycznej dostępne na stronie:
https://if.uj.edu.pl/dla-studentow/podreczniki-i-skrypty

W dalszym ciągu wykładu będziemy zajmować się konkretnymi przykładami opracowanymi w postaci notebooków. W szczególności są to:
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/wahadlo_matematyczne.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/ruchoma_rownia_2014.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/krzywa_trzeciego_stopnia.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/wahadlo_matematyczne_o_zmiennej_dlugosci.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/pret_po_osiach.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/polkula_na_gladkiej_powierzchni.nb
http://users.uj.edu.pl/~golak/NOF24-25/polkula_na_szorstkiej_powierzchni.nb

Przykład 1: oscylator harmoniczny prosty



x_1 – długość swobodnej sprężyny

x_2 – długość rozciągniętej lub ściśnietej sprężyny

Istotnym parametrem jest różnica $x = x_2 - x_1$

Mamy tu prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest rozciągnięcie sprężyny q=x

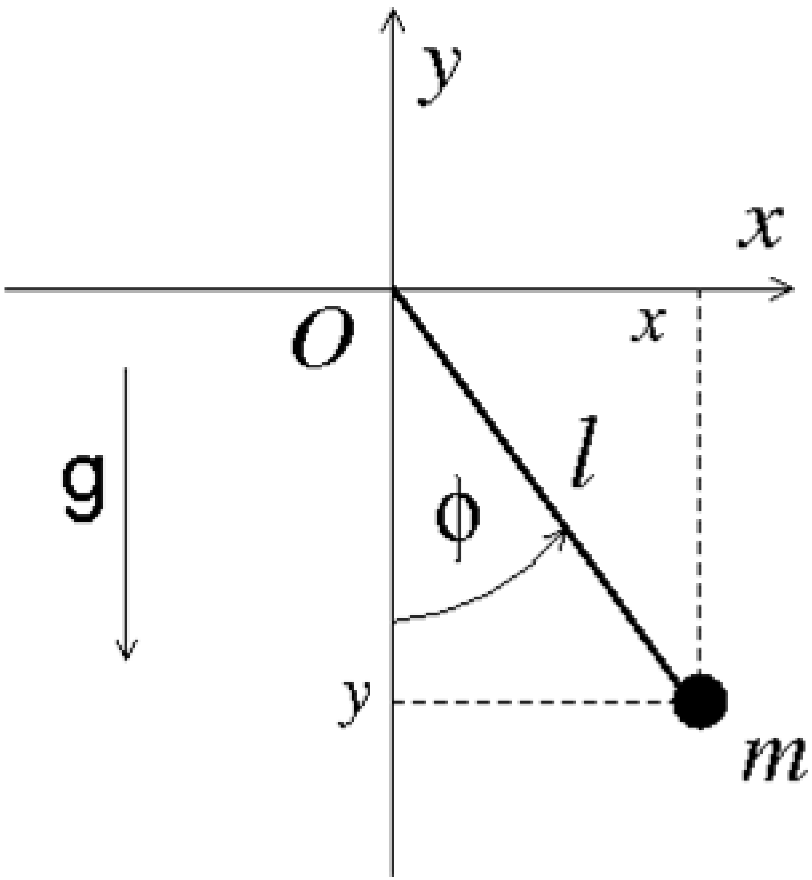
$$E_{kin}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$$E_{pot}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} k q^2$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = E_{kin}(q,\dot{q},t) - E_{pot}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq, \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}\right) = m\ddot{q}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow -kq = m\ddot{q}$$

Przykład 2: wahadło matematyczne płaskie



Tu też mamy tu prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest kąt wychylenia od pionu q=ϕ.

Uwaga: współrzędna uogólniona nie musi być „klasyczną” współrzędną i nie musi mieć wymiaru metra.

Najpierw wyrażamy położenie masy punktowej przez współrzędną uogólnioną *q*:

$$x = l\sin(q) \to \dot{x} = l\dot{q}\cos(q)$$

$$y = -l\cos(q) \to \dot{y} = l\dot{q}\sin(q)$$

$$E_{kin}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2$$

$$E_{pot}(q,\dot{q},t) = m\,g\,y = -mgl\cos(q)$$

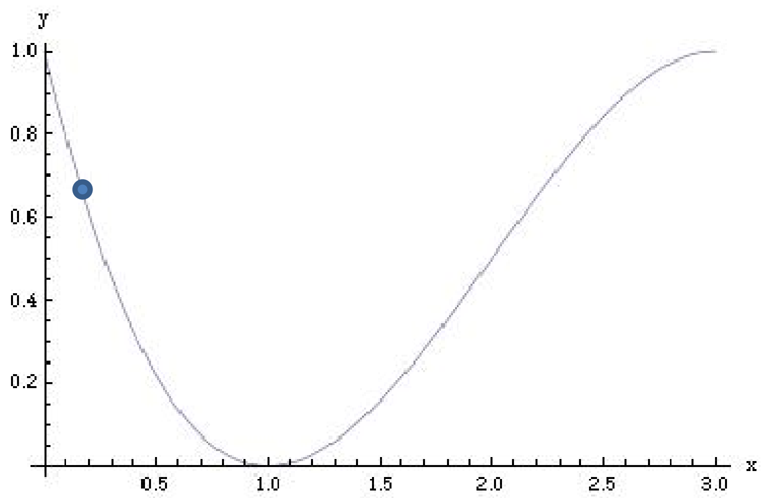
$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = E_{kin}(q,\dot{q},t) - E_{pot}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 + mgl\cos(q)$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = E_{kin}(q,\dot{q},t) - E_{pot}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + mgl\cos(q)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -mgl\sin(q), \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q}, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{q}\right) = ml^2 \ddot{q}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow -mgl\sin(q) = ml^2 \ddot{q}$$

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l}\sin(q)$$

Przykład 3: ruch koralika po drucie o zadanym kształcie



Mamy tu prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest współrzędna x wektora położenia koralika. Pomimo tego, że koralik porusza się w płaszczyźnie xy, jego współrzędna y jest określona przez x wzorem

y= $\mathbf{y=a(x-c)^2+b(x-c)^3}$.

Dlatego przyjmujemy, że współrzędna uogólniona to $q=x$

$$x = q \rightarrow \dot{x} = \dot{q}$$

$$y = \mathrm{a}(\mathrm{q} - \mathrm{c})^2 + \mathrm{b}(\mathrm{q} - \mathrm{c})^3 \rightarrow \dot{y} = (-\mathrm{c} + \mathrm{q})\,(2\,\mathrm{a} - 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{c} + 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{q})\,\dot{\mathrm{q}}$$

$$E_{kin}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2} m \;\left(1 + (\mathrm{c} - \mathrm{q})^2\,(2\,\mathrm{a} - 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{c} + 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{q})^2\right)\dot{\mathrm{q}}^2$$

$$E_{pot}(q, \dot{q}, t) = m\,g\,y = -mg\left(\mathrm{a}(\mathrm{q} - \mathrm{c})^2 + \mathrm{b}(\mathrm{q} - \mathrm{c})^3\right)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{kin}(q, \dot{q}, t) - E_{pot}(q, \dot{q}, t)$$

$$= -\mathrm{g}\,\mathrm{m}\,(\mathrm{c} - \mathrm{q})^2\,(\mathrm{a} - \mathrm{b}\,\mathrm{c} + \mathrm{b}\,\mathrm{q}) +$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}\,\left(1 + (\mathrm{c} - \mathrm{q})^2\,(2\,\mathrm{a} - 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{c} + 3\,\mathrm{b}\,\mathrm{q})^2\right)\dot{\mathrm{q}}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \text{-m}\,(\text{c} - \text{q})\,(\text{-2 a} + 3\,\text{b c} - 3\,\text{b q})\,(\text{g} - 2\,(\text{a} - 3\,\text{b c} + 3\,\text{b q})\,\dot{\text{q}}^2),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \text{m}\,(1 + (\text{c} - \text{q})^2\,(2\,\text{a} - 3\,\text{b c} + 3\,\text{b q})^2)\,\dot{q},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\Big(\text{m}\,(1 + (\text{c} - \text{q})^2\,(2\,\text{a} - 3\,\text{b c} + 3\,\text{b q})^2)\,\dot{q}\Big) =$$

$$-\,4\,\text{m}\,(\text{c} - \text{q})\,(\text{-2 a} + 3\,\text{b c} - 3\,\text{b q})\,(\text{-a} + 3\,\text{b c} - 3\,\text{b q})\,\dot{\text{q}}^2 +$$

$$\text{m}\,(1 + (\text{c} - \text{q})^2\,(2\,\text{a} - 3\,\text{b c} + 3\,\text{b q})^2)\,\ddot{\text{q}}$$

$$\ddot{q} = ((c - q)\,(2\,a - 3\,b\,c + 3\,b\,q)$$
$$(g + 2\,(a - 3\,b\,c + 3\,b\,q)\,\dot{q}^2))/$$
$$(1 + c^2(2\,a - 3\,b\,c)^2 +$$
$$q\,(2\,a - 6\,b\,c + 3\,b\,q)$$
$$(-4\,a\,c + 6\,b\,c^2 + q\,(2\,a - 6\,b\,c + 3\,b\,q)))$$

To równanie jest paskudnie nieliniowe i nie ma co nawet marzyć o istnieniu analitycznego rozwiązania. Numeryczne rozwiązanie tego równania nie stwarza większych trudności !

Każdy krok potrzebny do uzyskania tego równania i samo numeryczne rozwiązanie można uzyskać (niemal) automatycznie w programie *Mathematica* ☺