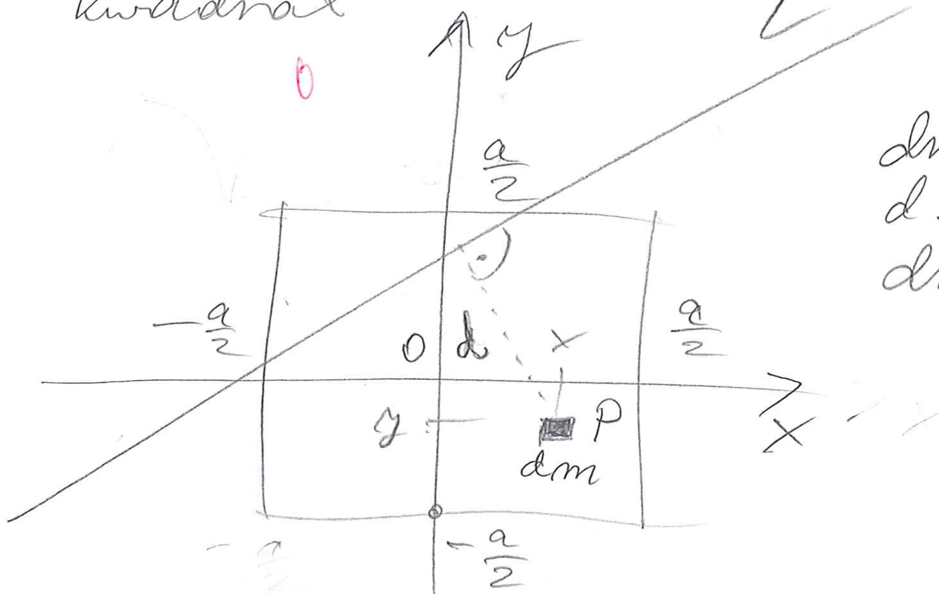
2019

Momenty bezwładności na płaszczyźnie

① Kwadrat



$dm = \sigma\, dS$

$dS = dx\,dy$

$dm = \sigma\, dx\,dy$

$\sigma = \frac{M}{a^2}$

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \text{ i } y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \right\}$$

$$l: Ax + By + C = 0$$

$$d(l, P) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d^2 = \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

$$I_1 = \int_K dm\, d^2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{a^2} dx\,dy \frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

$$\overset{M}{=} \frac{Ma^2}{12} + \frac{MC^2}{A^2+B^2}$$

(a) l pokrywa się z osią OX

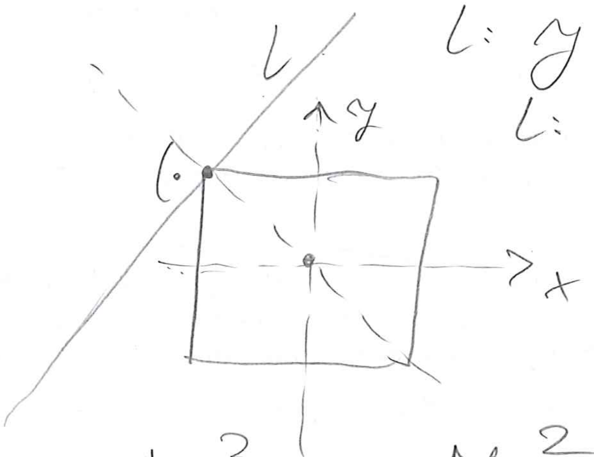
$l: y = 0 \iff Ax + By + C = 0$

$\iff A = 0 = C, B = 1$

$$I_{1a} = \frac{Ma^2}{12}$$

co więcej ten sam wynik mamy dla <u>każdej</u> prostej przechodzącej przez środek kwadratu!

(b)



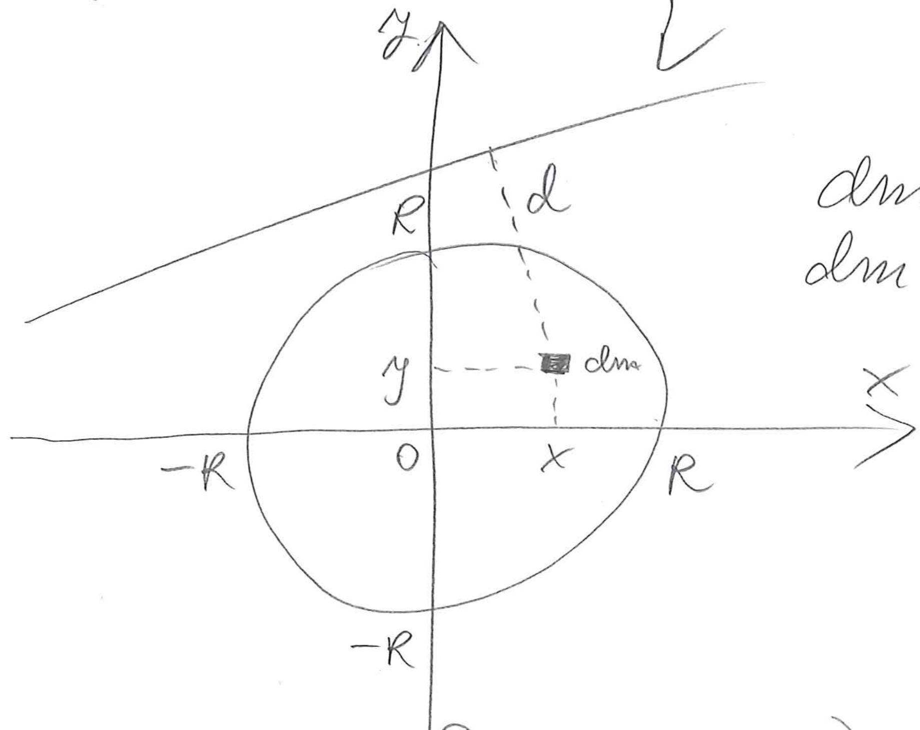
$l: y = x + a$

$l: x - y + a = 0$

$A = 1, B = -1, C = a$

$$I_{1b} = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{1+1} = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{2} = \frac{7Ma^2}{12}$$

(2) Koło



$$dm = \sigma\, dS$$
$$dm = \sigma\, dx\, dy$$
$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$\text{Koło}: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-R, R) \text{ i } y \in \left(-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}\right) \right\}$$

$$I_2 = \int_{\text{Koło}} dm\, d^2 = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \, \frac{M}{\pi R^2} \, \frac{(Ax^2+By+C)^2}{A^2+B^2}$$

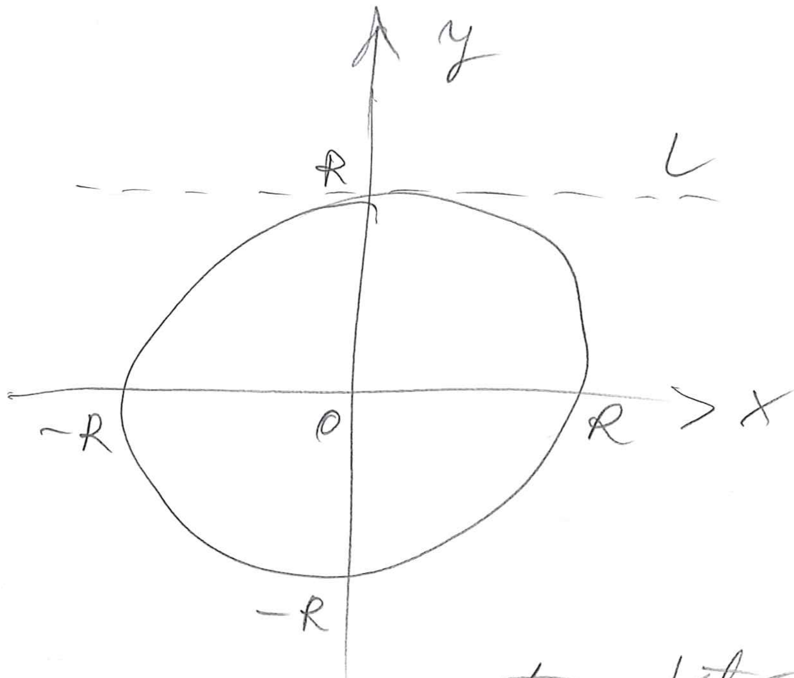
$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{Mc^2}{A^2+B^2}$$

(a) l pokrywa się z osią OX

$l: y = 0 \iff A = 0 = C, \; B = 1$

$I_{2a} = \frac{MR^2}{4}$ i ten wynik jest słuszny dla każdej prostej przechodzącej przez środek koła! Ze względu na symetrię to nie powinno nas dziwić!

(b)



$l: y = R$

$Ax + By + C = 0$

$A = 0, B = 1,$

$C = -R$

Dla dowolnej prostej, która styczna do koła mamy

$$I_{2b} = \frac{MR^2}{2} + \frac{MR^2}{1} = \frac{3}{2} MR^2$$