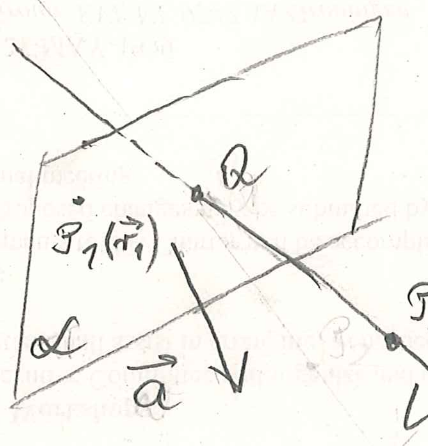
Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w przestrzeni



$$Q = \alpha \cap l$$

$$\alpha : \alpha \perp \vec a \ \text{ i } \ P_1 \in \alpha$$

$$l : l \parallel \vec b \ \text{ i } \ P_2 \in l$$

$$\begin{cases} (\vec r - \vec r_1)\circ \vec a = 0 \\ (\vec r - \vec r_2) \times \vec b = 0 \end{cases}$$

Problem ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli $\vec a \circ \vec b \neq 0$

$$\begin{cases} \vec a \cdot \vec r = \vec a \cdot \vec r_1 \\ \vec a \times \left((\vec r - \vec r_2) \times \vec b \right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec a \times (\vec r_2 \times \vec b) = (\vec a \cdot \vec b)\vec r_2 - (\vec a \cdot \vec r_2)\vec b}$$

$$\begin{cases} \vec a \cdot \vec r = \vec a \cdot \vec r_1 \\ \vec r \times \vec b = \vec r_2 \times \vec b \end{cases}$$

$$\vec r \times \vec b = \vec r_2 \times \vec b$$

$$\vec a \times (\vec r \times \vec b) = \vec a \times (\vec r_2 \times \vec b)$$

$$(\vec a \cdot \vec b)\vec r - (\vec a \cdot \vec r)\vec b = \vec a \times (\vec r_2 \times \vec b)$$

$$\vec a \cdot \vec r = \vec a \cdot \vec r_1$$

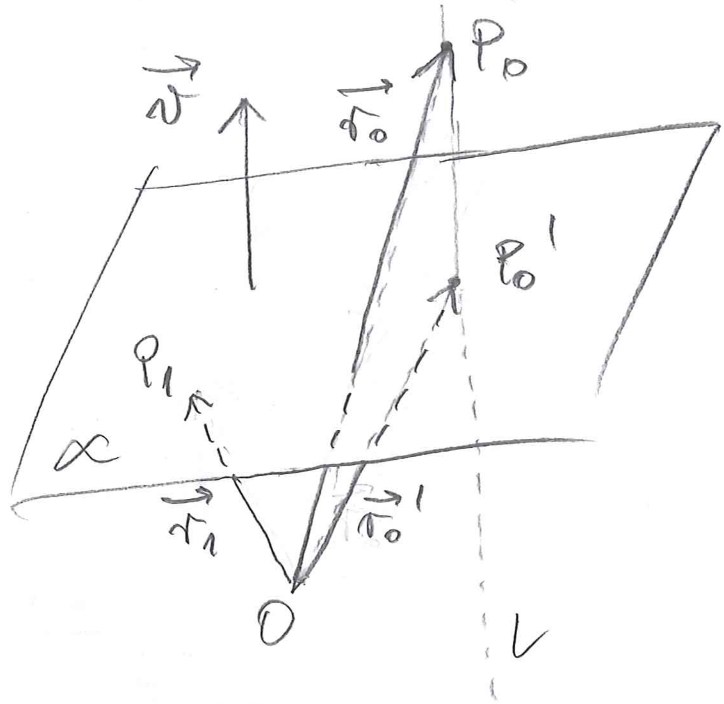
$$(\vec a \circ \vec b)\vec r - (\vec a \cdot \vec r_1)\vec b = \vec a \times (\vec r_2 \times \vec b)$$

$$(\vec a \circ \vec b)\vec r = (\vec a \cdot \vec r_1)\vec b + \vec a \times (\vec r_2 \times \vec b)$$

$$\vec r_Q = \frac{(\vec a \circ \vec r_1)\vec b + \vec a \times (\vec r_2 \times \vec b)}{\vec a \circ \vec b}, \quad \vec a \circ \vec b \neq 0$$

$$\vec r_Q = \frac{[\vec a \circ (\vec r_1 - \vec r_2)]\,\vec b + (\vec a \circ \vec b)\vec r_2}{\vec a \circ \vec b}, \quad \vec a \circ \vec b \neq 0$$

Odległość punktu P_0 od płaszczyzny α



Płaszczyzna jest zadana przez wektor $\vec{v}$, który jest prostopadły do płaszczyzny oraz punkt P_1, który należy do płaszczyzny. Aby znaleźć odległość P_0 od α, należy znaleźć rzut prostopadły P_0 na płaszczyznę, P_0'. odległość P_0 od α to odległość P_0 od P_0'. P_0' jest punktem wspólnym prostej L, która jest prostopadła do α (a więc równoległa do wektora $\vec{v}$) i przechodzi przez punkt P_0.

Dlatego możemy policzyć P_0', korzystając z wzoru

$$\vec{r_Q} = \frac{[\vec{a} \circ (\vec{r_1} - \vec{r_2})]\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{r_2}}{\vec{a} \circ \vec{b}},$$

jeśli przyjmiemy, że:

$\vec{a} = \vec{v}$

$\vec{b} = \vec{v}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_0$

$P_1(\vec{r}_1) \in \alpha$

$$\alpha: (\vec{r} - \vec{r}_1) \circ \vec{v} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} - \vec{v} \cdot \vec{r}_1 = 0$$

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z \underbrace{- \vec{v} \cdot \vec{r}_1}_{D} = 0$$

$\vec{r}_Q = \vec{r}_{P_0'} \equiv \vec{r}\,'$

$$\vec{r}\,' = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r}_1 - \vec{v} \cdot \vec{r}_0)\vec{v} + \vec{v}^2 \vec{r}_0}{\vec{v}^2}, \quad \vec{v} \neq 0$$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} \cdot \vec{r}_1 = -D$

$-\vec{v} \cdot \vec{r}_0 = -v_1 x_0 - v_2 y_0 - v_3 z_0$

$$d(P_0, \alpha) = |\vec{r}\,' - \vec{r}_0| = \frac{1}{\vec{v}^2} \left| (\vec{v} \cdot \vec{r}_1 - \vec{v} \cdot \vec{r}_0) \vec{v} \right|$$

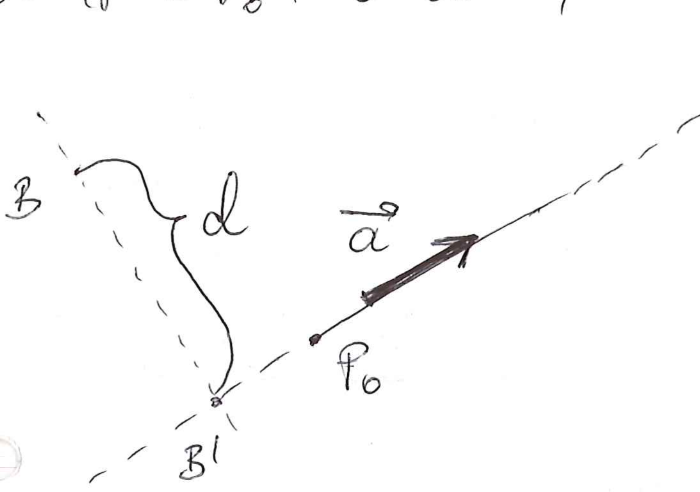
$$= \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|^2} \left| \vec{v} \cdot \vec{r}_1 - \vec{v} \cdot \vec{r}_0 \right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{r}_1 - \vec{v} \cdot \vec{r}_0|}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{|v_1 x_0 + v_2 y_0 + v_3 z_0 + D|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Odległość prostej od punktu w przestrzeni d

Zadajemy prostą w postaci parametrycznej

$l: \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{a} \quad , \; t \in R$



B' należy do prostej l

B' należy do płaszczyzny π prostopadłej do prostej l przechodzącej przez B

$$\pi: (\vec{r} - \vec{r_B}) \circ \vec{a} = 0$$

$$B' \in \pi \Longrightarrow (\vec{r_{B'}} - \vec{r_B}) \circ \vec{a} = 0$$

$$B' \in l \Longrightarrow \vec{r_{B'}} = \vec{r_0} + t\vec{a}$$

$$\vec{r_{B'}} \circ \vec{a} = \vec{r_B} \circ \vec{a}$$

$$\vec{r_{B'}} \circ \vec{a} = \vec{r_0} \circ \vec{a} + t\vec{a}^2$$

$$t = \frac{\vec{r_B} \circ \vec{a} - \vec{r_0} \circ \vec{a}}{\vec{a}^2}$$

$$\vec{r_{B'}} = \vec{r_0} + \frac{\vec{r_B} \circ \vec{a} - \vec{r_0} \circ \vec{a}}{\vec{a}^2} \vec{a}$$

$$d = |\vec{r_B} - \vec{r_{B'}}|$$