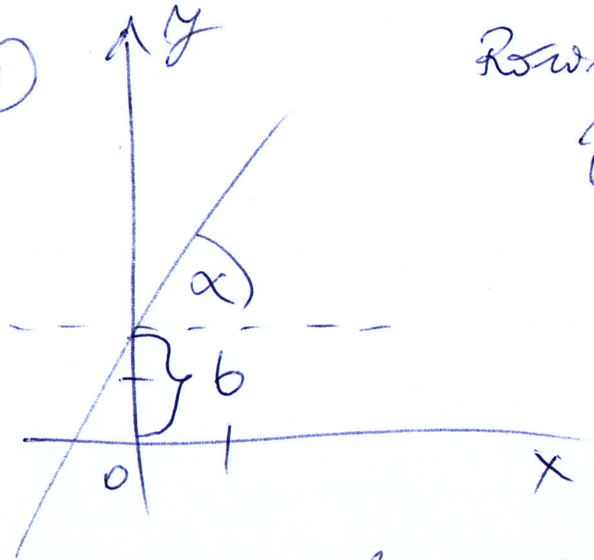
Elementy geometrii

Punkt i prosta na płaszczyźnie

1



Równanie kierunkowe prostej

$$y = ax + b$$

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

(To równanie nie opisuje prostej o równaniu $x = x_0$)

- Dwie proste równoległe mają te same wartości a

  $l_1: y = ax + b_1, \quad l_2: y = ax + b_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

- Dla $a \neq 0$ można wskazać łatwo $l_2 \perp l_1$

  $l_1: y = ax + b_1, \quad l_2: y = -\frac{1}{a}x + b_2 \Rightarrow l_1 \perp l_2$

  Wynika to z tożsamości

  $$\operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

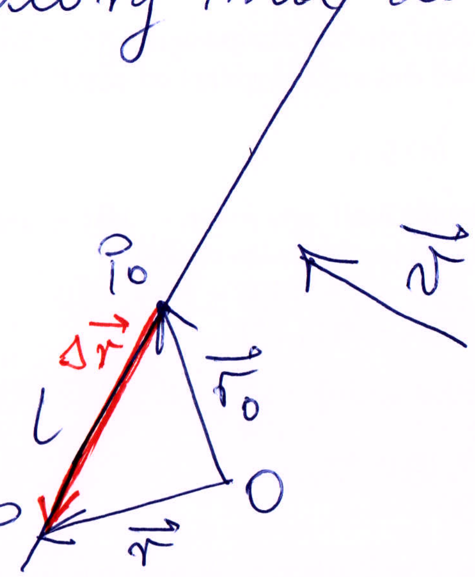
- Zadanie: Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 \neq x_2$

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

② Równanie ogólne prostej

Aby zdefiniować prostą, trzeba podać niezerowy wektor $\vec{v}$, do którego prosta jest prostopadła i punkt P_0, który ma do prostej należeć



$\vec{r_0}$ – wektor położenia punktu P_0

$\vec{r}$ – wektor położenia dowolnego punktu P, który ma do prostej należeć

Musi zachodzić: $(\Delta\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r_0})$

$$\Delta\vec{r} \perp \vec{v}$$

$$\Delta\vec{r} \circ \vec{v} = 0$$ (iloczyn skalarny)

Wprowadzamy układ współrzędnych kartezjańskich. Niech w tym układzie zachodzi

$\vec{v} = (A, B)$
$\vec{r_0} = (x_0, y_0)$
$\vec{r} = (x, y)$

składowe wektorów

$A^2 + B^2 > 0$, bo $\vec{v} \neq 0$

$$(x - x_0, y - y_0) \circ (A, B) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + \underbrace{(-Ax_0 - By_0)}_{C} = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \leftarrow$$ to jest właśnie równanie ogólne prostej, obejmujące wszystkie możliwe przypadki

- Dwie proste równoległe są prostopadłe do tego samego wektora

$l_1 : Ax + By + C_1 = 0$

$l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ $\quad l_1 \parallel l_2$

- Dwie proste są do siebie prostopadłe, jeśli są prostopadłe odpowiednio do wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, gdzie $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

$l_1 : Ax + By + C_1 = 0$

$l_2 : -Bx + Ay + C_2 = 0$ $\quad l_1 \perp l_2$

$\vec{v}_1 = (A, B)$

$\vec{v}_2 = (-B, A)$

$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = -AB + BA = 0$,

co oznacza, że $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

Proste problemiki

(P1) Znaleźć dowolny punkt $P_1(x_1, y_1)$ który należy do prostej l o równaniu $Ax+By+C=0$

Musi zachodzić albo $A \neq 0$, albo $B \neq 0$

a) $A \neq 0$

$y_1 = 0$, $Ax_1 + C = 0$

$x_1 = -\frac{C}{A}$

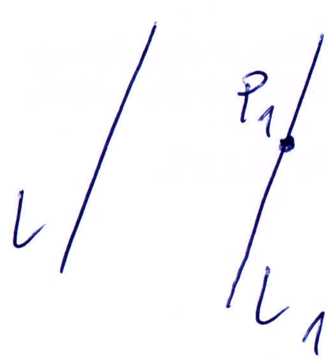
$P_1\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$

b) $B \neq 0$

$x_1 = 0$, $By_1 + C = 0$

$P_1\left(0, -\frac{C}{B}\right)$

(P2) Znaleźć prostą równoległą do prostej l $Ax+By+C=0$, przechodzącą przez punkt $P_1(x_1, y_1)$



$l_1: Ax+By+C_1=0$

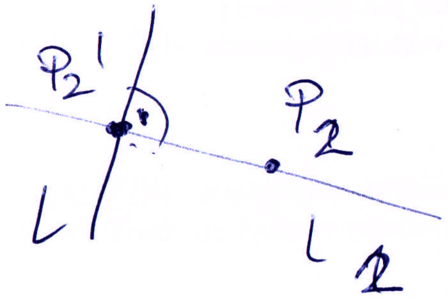
$P_1 \in l_1$

$Ax_1+By_1+C_1=0$

$C_1 = -Ax_1 - By_1$

$l \parallel l_1$ $\qquad$ $l_1: A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$

(P3) Znaleźć prostą prostopadłą do prostej $l: Ax+By+C=0$, przechodzącą przez punkt $P_2(x_2, y_2)$



$$l_2: -Bx + Ay + C_2 = 0$$

$$P_2 \in l_2$$

$$-Bx_2 + Ay_2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = Bx_2 - Ay_2$$

$$l_2: -B(x-x_2) + A(y-y_2) = 0$$

(P4) Znaleźć rzut prostopadły $P_2'(x_2', y_2')$ punktu $P_2(x_2, y_2)$ na prostą $L: Ax+By+C=0$.

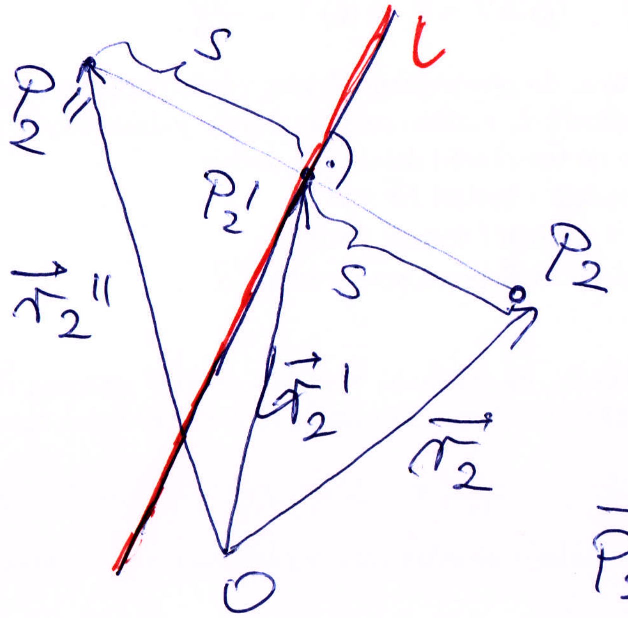
Oczywiście $P_2' = l_2 \cap L$, gdzie l_2 dane jest w (P3).

$$\begin{cases} Ax_2' + By_2' + C = 0 \\ -B(x_2'-x_2) + A(y_2'-y_2) = 0 \end{cases}$$

$$x_2' = \frac{B^2 x_2 - A(C+By_2)}{A^2+B^2}$$

$$y_2' = \frac{-B(C+Ax_2) + A^2 y_2}{A^2+B^2}$$

(P5) Znaleźć odbicie symetryczne punktu $P_2(x_2, y_2)$ względem prostej $L: Ax+By+C=0$



$P_2(x_2, y_2)$

$P_2'(x_2', y_2')$

mamy z (P4)

Zachodzi:

$$\vec{r}_2'' = \vec{r}_2 + 2\overrightarrow{P_2P_2'}$$

$$\overrightarrow{P_2P_2'} = \vec{r}_2' - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_2'' = (x_2'', y_2'')$$

$$x_2'' = \frac{-A^2x_2 + B^2x_2 - 2A(C+By_2)}{A^2+B^2}$$

$$y_2'' = \frac{-2B(C+Ax_2) + A^2y_2 - B^2y_2}{A^2+B^2}$$