Pierwiastek kwadratowy w
z dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$

$w = z^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow w^2 = z$

$w = a + ib$

Dane: x, y Szukane: a, b

$w^2 = a^2 - b^2 + 2abi = x + iy$

$|w|^2 = |z|$

$a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2abi = x + iy \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

to są dwa równania, bo muszą się zgadzać część rzeczywista i część urojona

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Dodajemy stronami pierwsze i trzecie równanie

$2a^2 = x + \sqrt{x^2+y^2}$

$2ab = y$

Rozważamy przypadki

1. $x \leq 0$ i $y = 0$

$x + \sqrt{x^2+y^2} = x + |x| = 0 \Rightarrow a = 0$

$b = \pm\sqrt{|x|}$

$w_1 = i\sqrt{|x|}$, $w_2 = -i\sqrt{|x|}$

Dla $z = 0$ mamy $w_1 = w_2 = 0$

(2) $x > 0$ lub $y \neq 0$

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$$b = \frac{y}{2a}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)} + \frac{yi}{\sqrt{2\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)}}$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)} - \frac{yi}{\sqrt{2\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)}}$$

27.10.2015