

Narzędzia obliczeniowe fizyki
Zestaw nr 2

Rozwiązania wszystkich zadań mają się znaleźć **w jednym** notatniku programu *Mathematica*[®], a nazwa notatnika ma mieć postać „Imie_Nazwisko_zad_02.nb” (bez polskich „ogonków”). Zadania należy przesłać **wyłącznie w formie załącznika do maila** na adres jacek.golak@uj.edu.pl najpóźniej we wtorek przed kolejnymi zajęciami. Po tym terminie zadania nie będą przyjmowane. Bardzo proszę **zwrócić uwagę na poprawny zapis wzorów**. Jednym z celów tego zestawu jest ćwiczenie umiejętności zapisywania w notatniku dowolnego wyrażenia matematycznego.

1. Policzyc granice ciągów liczbowych:

(a) $a_n = \sin^3 \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) n^3 - n^2$,

(b) $b_n = \cos(n\pi) n^2 + \sin(2n\pi) n^3$,

(c) $c_n = \frac{3n^2+11}{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^{n^2+7}}$,

(d) $d_n = \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^n$,

(e) $d_n = \left((n^3 - 4n^2)^{\frac{1}{3}} - n \right)$.

2. Policzyc granice funkcji:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{2x}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+10)}{\ln(x^8+100)}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$,

(e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x^2-4)^2}$,

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x^2-4)^2}$.

3. Funkcja $f(x)$ dana jest przedziałami:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)} & , \quad x < 0, \\ (1+3a)e^{ax} & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Znaleźć wartość parametru a , przy której funkcja $f(x)$ jest ciągła w całej swojej dziedzinie oraz narysować jej wykres dla $x \in [-3, 5]$ dla znalezionej wartości a .

4. Obliczyć pochodne funkcji zmiennej rzeczywistej (a) x^x , (b) $f(x) = x^{2x} \frac{1+\sqrt{x^2-2}}{(4-\ln(1-x^4))}$.

5. Obliczyć pochodne do rzędu siódmego w punkcie $x = e$ dla funkcji: $f(x) = \ln^4\left(\frac{x}{(x+e)^2}\right)$, gdzie oczywiście $\ln e = 1$.
6. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$ w punkcie $x = 6$. Narysować na jednym rysunku wykres funkcji $f(x)$, styczną oraz zaznaczyć punkt styczności, używając funkcji *Plot*, *ListPlot* oraz *Show*.
7. Znaleźć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania $x^4 + 8x^3 - 3x + 10 = 0$ z dokładnością do 20 miejsc znaczących.
8. Rozwiązać nierówność $x^5 - 8x^3 - 2x - 6 \geq 0$.
9. Znaleźć przybliżoną wartość rzeczywistego pierwiastka równania $2\sin(x) - \ln(x) = 0$ leżącego w przedziale $(2, 3)$.
10. Stosując schemat postępowania przedstawiony w notatniku *NOF_2.nb*, zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{\ln(x^2-4)}{(x-1)^2}$.

Jacek Golak