WZFT

II wykład

Twierdzenie Lagrange'a

Rząd podgrupy H grupy G musi być dzielnikiem rzędu grupy G.

Podgrupy normalne

Podgrupa normalna spełnia

$$\forall g \in G : gHg^{-1} = H$$

albo

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

albo

$$h \in H \Rightarrow ghg^{-1} = h' \in H, \ \forall g \in G$$

Zbiór warstw podgrupy normalnej G/H może być wyposażony w strukturę grupy przez odpowiednią definicję działania na warstwach

$$(g_1 H)(g_2 H) := (g_1 g_2) H$$

Czy takie działanie stanowi grupę?

① łączność

$$(g_1 H)\left[(g_2 H)(g_3 H)\right] =$$

$$(g_1 H)(g_2 g_3) H = g_1 (g_2 g_3) H =$$

$$= (g_1 g_2) g_3 H = \left[(g_1 H)(g_2 H)\right] g_3 H$$

c.b.d.u.

(2) Element neutralny

Jej rolę pełni $E = eH = H$, ponieważ:

$$(eH)(gH) = (eg)H = gH$$

$$(gH)(eH) = (ge)H = gH$$

(3) Element odwrotny

$$(gH)(g^{-1}H) = (gg^{-1})H = eH = H = E$$

$$(g^{-1}H)(gH) = (g^{-1}g)H = eH = H = E$$

Kluczowe jest sprawdzenie spójności definicji: działanie na warstwach nie może zależeć od wyboru reprezentantów w definicji działania na warstwach

$$g_1H = g_1'H \quad , \quad g_2H = g_2'H$$

Czy zachodzi

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1'H)(g_2'H) \quad ?$$

$$g \in gH$$

$$g' \in gH \Rightarrow g' = gh \text{ dla pewnego } h \in H$$

$$(g_1'H)(g_2'H) = g_1'g_2'H =$$

H jest normalna

$$= g_1h_1g_2\underbrace{h_2H}_{\substack{H \\ \text{dla } h_2 \in H}} = g_1h_1\underline{g_2H} \overset{\swarrow}{=} g_1h_1\underline{Hg_2}$$

$$= g_1Hg_2 = g_1g_2H$$

$h_1H = H$ H jest normalna

Przykład

$D_3 = \{e, c, c^2, b, bc, bc^2\}$,

gdzie $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$

$H = \{e, c, c^2\}$ podgrupa

Czy H jest normalna?

Sprawdzamy równość warstwy lewostronnej i prawostronnej dla wszystkich elementów $D_3 = G$

(a) Dla $H \ni g$ zachodzi oczywiście $gH = Hg$

(b) $bH = \{b, bc, bc^2\}$

$Hb = \{b, cb, c^2b\}$

$b /\ bcbc = e$

$cbc = b \ /\ c^2$

$\underline{cbc^3 = cb = bc^2}$

$c^2b = c^2\underline{bb}cbc = c^3bc = bc$

Dlatego $bH = Hb$

(c) $bcH = \{bc, bc^2, bc^3\} = \{b, bc, bc^2\}$

$Hbc = \{bc, cbc, \underbrace{c^2bc}_{bc}\} = \{bc, b, bc^2\}$,

więc $bcH = Hbc$

(d) $bc^2H = \{bc^2, bc^3, bc^4\} = \{bc^2, b, bc\}$

$Hbc^2 = \{bc^2, cbc^2, c^2bc^2\} =$

$= \{bc^2, \underbrace{cbc}_{b}c, c\underbrace{cbc}_{b}c\} = \{bc^2, bc, b\} = bc^2H$

Mamy więc dwie warstwy

$$eH = H = \{e, c, c^2\} \equiv E$$

$$bH = \{b, bc, bc^2\} \equiv B$$

Możliwe iloczyny

$$EE = (eH)(eH) = eeH = eH = H \equiv E$$

$$EB = (eH)(bH) = ebH = bH \equiv B$$

$$BE = (bH)(eH) = beH = bH \equiv B$$

$$BB = (bH)(bH) = b^2H = eH = H \equiv E$$

$$\boxed{D_3 / C_3 \cong C_2}$$

Czy $J = \{e, b\}$ in D_3 jest normalna?

$$cJ = \{c, cb\} = \{c, bc^2\}$$

$$Jc = \{c, bc\} = \{c, bc\} \neq cJ$$

Dlatego J nie jest podgrupą normalną!

Homomorfizm grup A i B

$f: A \to B$

$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$

Tw. $f(A)$ jest podgrupą B

(0) $b_1, b_2 \in f(A)$ — wewnętrzność

Czy $b_1 b_2 \in f(A)$?

$\exists a_1 \in A : b_1 = f(a_1)$

$\exists a_2 \in A : b_2 = f(a_2)$

$$b_1 b_2 = f(a_1) f(a_2) = f(\underbrace{a_1 a_2}_{a_3 \in A}) = f(a_3) \in f(A)$$

(1) Łączność

$b_1, b_2, b_3 \in f(A)$

$b_1 (b_2 b_3) \overset{?}{=} (b_1 b_2) b_3$

$\exists a_1, a_2, a_3 \in A : f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_3$

$$b_1 (b_2 b_3) = f(a_1)(f(a_2) f(a_3)) =$$
$$= f(a_1) f(a_2 a_3) = f(a_1(a_2 a_3)) =$$
$$= f((a_1 a_2) a_3) = f(a_1 a_2) f(a_3) =$$
$$= (f(a_1) f(a_2)) f(a_3) = (b_1 b_2) b_3$$

Wykorzystano definicję homomorfizmu oraz łączność działania grupowego w A.

(2) element neutralny

czy $e_B \in f(A)$?

$e_B = f(e_A)$ na próbę !

$e_B \cdot b = f(e_A) f(a) = f(e_A a) = f(a) = b$

$b\, e_B = f(a) f(e_A) = f(a e_A) = f(a) = b$

Oczywiście $e_B \equiv f(e_A) \in f(A)$, bo $e_A \in A$

(3) element odwrotny dla każdego $a \in A$

czy $b^{-1} \equiv (f(a))^{-1} = f(a^{-1})$?

$f(a) f(a^{-1}) = f(a a^{-1}) = f(e_A) = e_B$

$f(a^{-1}) f(a) = f(a^{-1} a) = f(e_A) = e_B$

Jądro homomorfizmu

$$\mathrm{Ker} f = f^{-1}(e_B) = \{a \in A : f(a) = e_B \in B\}$$

Twierdzenie

$\mathrm{Ker} f \subset A$ jest podgrupą normalną A

(0) wewnętrzność

$a_1, a_2 \in \mathrm{Ker} f$

czy $a_1 a_2 \in \mathrm{Ker} f$?

$f(a_1) = e_B = f(a_2)$

$\underbrace{f(a_1) f(a_2)} = e_B e_B = e_B$

$f(a_1 a_2) = e_B \Rightarrow a_1 a_2 \in \mathrm{Ker} f$

(1) łączność

$a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{Ker} f \subset A$, więc łączność wynika z łączności działania w A

(2) element neutralny

zdefiniowaliśmy $e_B = f(e_A)$, więc $e_A \in \mathrm{Ker} f$

(3) element odwrotny

dla każdego $a \in \mathrm{Ker} f$

$a \in \mathrm{Ker} f$. Czy $a^{-1} \in \mathrm{Ker} f$?

$$e_B = f(\underbrace{a a^{-1}}_{e_A}) = f(a) f(a^{-1}) = e_B f(a^{-1})$$

$$= f(a^{-1}) \Rightarrow a^{-1} \in \mathrm{Ker} f$$

Aby Ker$f$ był podgrupą normalną,
musi zachodzić
$$k \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \forall a \in A \quad a k a^{-1} \in \mathrm{Ker} f$$
Aby $aka^{-1} \in \mathrm{Ker} f$ $f(aka^{-1})$ ma być równe e_B. I tak jest rzeczywiście, gdyż
$$f(aka^{-1}) = f(a) f(k) f(a^{-1}) =$$
$$= f(a) e_B f(a^{-1}) = f(a) f(a^{-1}) =$$
$$= f(aa^{-1}) = f(e_A) = e_B$$

Twierdzenie o izomorfizmie

$f: G \to G'$ homomorfizm
z jądrem K
$$\mathrm{Im}(f) \cong G/K$$
Odwzorowanie ma postać
$$G' \ni f(g) \leftrightarrow \underbrace{gK}_{\text{warstwa } G}$$

Czy ta definicja jest poprawna?

$f(g) \longmapsto gK$

(1) Co się dzieje, gdy $f(g) = f(g')$?

Jeśli $f(g) = f(g')$, to

$$e' = f(g)(f(g'))^{-1} = f(g)f(g'^{-1}) =$$

$$= f(gg'^{-1}) \Rightarrow gg'^{-1} \in K$$

$$g'K = Kg' = \{\dots, gg'^{-1}, \dots\}g'$$

$$\Rightarrow g \in Kg' = g'K$$

$$g \in gK, \text{ bo } K \ni e$$

Warstwy gK i $g'K$ mają element wspólny (g), więc muszą być identyczne

(2) $gK \to f(g)$

Czy odwzorowanie nie zależy od reprezentanta warstwy g ?

$$g'K = gK$$

$$g' \in gK \Rightarrow g' = gk_i$$

$$f(g') = f(g)\underbrace{f(k_i)}_{e'} = f(g)$$

(3) Czy zachowana jest struktura grupowa odwzorowania? 23

$$f(g)f(g') = f(gg') = gg'K$$
$$\underset{\uparrow}{=} (gK)(g'K)$$

z własności działania na warstwach

Działanie grupy na przestrzeni wektorowej

Aksjomaty przestrzeni wektorowej $(V, +, \cdot)$

dodawanie wektorów "+"

(a0) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} \in V$

(a1) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \omega \in V \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{\omega}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{\omega}$

(a2) $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(a3) $\forall \vec{u} \in V \ \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(a4) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

mnożenie wektora przez liczbę

(b0) $\forall a \in \mathbb{C} \ \forall \vec{u} \in V \quad a\vec{u} \in V$

(b1) $\forall a \in \mathbb{C}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

(b2) $\forall a, b \in \mathbb{C} \ \forall \vec{u} \in V \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

(b3) $\forall a, b \in \mathbb{C} \ \forall \vec{u} \in V \quad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

(b4) $\forall \vec{u} \in V \quad 1\vec{u} = \vec{u}$

Własności

(w1) $0\vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} = (1+0)\vec{u} = 1\vec{u} + 0\vec{u} = \vec{u} + 0\vec{u} \quad / + (-\vec{u})$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + 0\vec{u} + (-\vec{u})$

$\vec{0} = \vec{0} + 0\vec{u}$

$\vec{0} = 0\vec{u}$

(w2) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

$$\vec{0} = 0\vec{u} = (1+(-1))\vec{u} = 1\vec{u} + (-1)\vec{u}$$

$$\vec{0} = \vec{u} + (-1)\vec{u} \quad / + (-\vec{u})$$

$$\vec{0} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} + (-1)\vec{u}$$

$$-\vec{u} = \vec{0} + (-1)\vec{u}$$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u}$$

Zbiór m wektorów $\{\vec{e}_i\}$, $i=1,2,\ldots,m$, jest <u>liniowo niezależny</u>, jeśli

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}\right) \Rightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \ \lambda_i = 0$$

Liniowo niezależny zbiór wektorów $\{\vec{e}_i\}$, $i=1,2,\ldots,m$, stanowi <u>bazę przestrzeni wektorowej V</u>, jeśli

$$\forall \vec{u} \in V \ \exists u_1, u_2, \ldots u_m \in \mathbb{C} : \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} u_i \vec{e}_i$$

Przestrzeń wektorowa V jest <u>n-wymiarowa</u>, jeśli posiada bazę złożoną z n wektorów

Twierdzenie

Każde dwie bazy przestrzeni wektorowej muszą posiadać tę samą liczbę elementów

Dowód

Przypuśćmy, że istnieją dwie bazy $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ i $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ oraz $n < m$.

Rozważmy zbiór $\{\vec{f}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, który jest liniowo zależny, więc jeden z wektorów, powiedzmy $\vec{e}_j$ może być wyrażony przez wektory $\{\vec{f}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, które stanowią bazę.

Teraz dołączamy wektor $\vec{f}_2$ do zbioru powyższych wektorów i eliminujemy kolejny wektor $\vec{e}$ na korzyść $\vec{f}_2$. Działając dalej w ten sposób dochodzimy do wniosku, że zbiór $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ stanowi bazę, a więc $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$, $m > n$, jest liniowo zależny, co oznacza sprzeczność!

Przekształcenie liniowe T

$T: V \to V$ jest liniowe, jeśli

$$T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha T\vec{u} + \beta T\vec{v},$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

$\{\vec{e}_i\}$ – baza przestrzeni wektorowej V

$$T\vec{e}_j \equiv \sum_i D_{ij}\vec{e}_i$$

definicja macierzy przekształcenia liniowego w bazie $\{\vec{e}_i\}$

uwaga na indeksy!

$$T\vec{u} = T\Big(\sum_j u_j \vec{e}_j\Big) = \sum_j u_j T\vec{e}_j =$$

$$= \sum_j u_j \sum_i D_{ij}\vec{e}_i = \sum_i \Big(\sum_j D_{ij} u_j\Big)\vec{e}_i$$

$$T\vec{u} \equiv \vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$$

$$v_i = \sum_j D_{ij} u_j$$

zwykłe mnożenie macierzowe!

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & D & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie $\{\vec{e}_i\}$

macierz przekształcenia liniowego w bazie $\{\vec{e}_i\}$

współrzędne wektora $\vec{u}$ w bazie $\{\vec{e}_i\}$

Podobieństwo

$\{\vec{e}_i\} \longrightarrow$ macierz D $\qquad T\vec{e}_j = \sum_i D_{ij}\vec{e}_i$

$\{\vec{f}_i\} \longrightarrow$ macierz D'

$$T\vec{f}_j = \sum_i D'_{ij}\vec{f}_i$$

$$\vec{u} = \sum_j u_j \vec{e}_j = \sum_j u'_j \vec{f}_j$$

$$\vec{v} = T\vec{u}$$

$v_i = \sum_j D_{ij} u_j \qquad v = Du$ baza $\{\vec{e}_i\}$

$v'_i = \sum_j D'_{ij} u'_j \qquad v' = D'u'$ baza $\{\vec{f}_i\}$

Zmiana bazy:

$$\Rightarrow \vec{e}_i = \sum_j S_{ji}\vec{f}_j$$

$$u = \sum_i u_i \vec{e}_i = \sum_i u_i \sum_j S_{ji}\vec{f}_j = \sum_j \underbrace{\left(\sum_i u_i S_{ji}\right)}_{u'_j}\vec{f}_j$$

$$u'_j = \sum_i u_i S_{ji}$$

$u' = Su$ i podobnie $v' = Sv$

$$v' = Sv = SDu = \underbrace{SDS^{-1}}_{D'}u'$$

$\uparrow$ wektor współrzędnych Tu w bazie $\{\vec{f}_i\}$

$\nwarrow$ wektor współrzędnych u w bazie $\{\vec{f}_i\}$

$$D' = S D S^{-1}$$

macierze reprezentujące to samo przekształcenie liniowe ale odnoszące się do różnych baz przestrzeni wektorowej V są powiązane transformacją podobieństwa. Istnienie S^{-1} wynika z możliwości odwrócenia relacji

$$\vec{e}_i = \sum_j S_{ji} \vec{f}_j$$

$$\vec{e}_i = \sum_j (S^T)_{ij} \vec{f}_j$$

$$e = S^T f$$

$$f = (S^T)^{-1} e$$

$$f = (S^{-1})^T \vec{e}$$

$$\vec{f}_i = \sum_j S^{-1}_{ji} \vec{e}_i$$

wygodnie jest rozumieć reprezentację grupy G jako homomorfizm przekształcający G w grupę nieosobliwych przekształceń liniowych w przestrzeni wektorowej V

$$G \ni g \to T(g)$$

operator liniowy w V

Zachodzi oczywiście

$$T(gg') = T(g)\,T(g')$$

Przestrzeń wektorowa z takim działaniem grupy to G-moduł

W tym języku redukowalność należy rozumieć jako istnienie podmodułu, czyli podprzestrzeni wektorowej $U \subset V$, która jest zamknięta ze względu na działanie grupy:

$$\forall g \in G \; \forall u \in U \subset V : T(g)\,u \in U$$

Niech $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, będzie bazą U, niech $\{e_i\}$, $i = m+1, \ldots, m+n$ rozpinają podprzestrzeń W i zarazem wszystkie $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m+n$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej V o wymiarze $n+m$

$$T(g)\vec{e}_j = \sum_i D_{ij}\vec{e}_i$$

Zamkniętość U, czyli fakt, że $T(g)\vec{e}_i$ ($\vec{e}_i$ - wektor bazowy U) nie ma składowej w W, oznacza, że

$$D_{ij}(g) = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, m$$
$$\text{oraz } i = m+1, \ldots, m+n$$

Macierz $D(g)$ przyjmuje postać

$$D(g) = \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Dla grup skończonych oraz tzw. grup "zwartych" można przyjąć $C(g) = 0$.

Dowodzi się tego, wykazując, że wszystkie reprezentacje grupy skończonej są równoważne reprezentacji unitarnej.

Aby mówić o reprezentacji unitarnej, trzeba wprowadzić iloczyn skalarny!

Iloczyn skalarny

Odwzorowanie, które parze wektorów przypisuje liczbę zespoloną i spełnia warunki

(S1) $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})^*$

(S2) $(\vec{w},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(w,u)+\beta(w,v)$

(S3) $(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$

oraz $(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ - dowolne wektory z V

α,β - dowolne liczby zespolone

Norma wektora $\|u\| \equiv (u,u)^{\frac{1}{2}}$

Baza ortonormalna

$(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij}$

Ortonormalizacja Grama-Schmidta

$\{\vec{f}_i\}$ - baza V, ale $(\vec{f}_i,\vec{f}_j) \neq \delta_{ij}$

Z wektorów $\{\vec{f}_i\}$ budujemy bazę ortonormalną $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$$

$$\vec{e}_2 = \left(\vec{f}_2 - (\vec{e}_1,\vec{f}_2)\vec{e}_1\right) / \| \qquad \|$$

$$\vec{e}_3 = (\vec{f}_3 - (\vec{e}_1, \vec{f}_3)\vec{e}_1 - (\vec{e}_2, \vec{f}_3)\vec{e}_2) / \| \quad \|$$

itd.

W ortonormalnej bazie $\{\vec{e}_i\}$ "współrzędne" dowolnego wektora $\vec{u}$, czyli współczynniki rozwinięcia w wyrażeniu $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$, można utożsamić z iloczynami skalarnymi $(\vec{e}_i, \vec{u})$:

$$\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$$

$$(\vec{e}_j, \vec{u}) = (\vec{e}_j, \sum_i u_i \vec{e}_i) = \sum_i u_i \underbrace{(\vec{e}_j, \vec{e}_i)}_{\delta_{ji}}$$

$$= \sum_i u_i \delta_{ji} = u_j$$

Dlatego też zachodzi dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{v} = \sum_j v_j \vec{e}_j$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\sum_i u_i \vec{e}_i, \sum_j v_j \vec{e}_j) =$$

$$= \sum_j v_j (\sum_i u_i \vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_j v_j (\vec{e}_j, \sum_i u_i \vec{e}_i)^*$$

$$= \sum_j v_j \sum_i u_i^* \underbrace{(\vec{e}_j, \vec{e}_i)^*}_{\delta_{ji}} = \sum_j \sum_i v_j u_i^* \delta_{ij}$$

$$= \sum_j u_j^* v_j = \sum_i u_i^* v_i = u^+ v$$

$$T\vec{e}_j = \sum_i D_{ij}\vec{e}_i$$

$$D_{ij} = (\vec{e}_i, T\vec{e}_j)$$

$$(\vec{u}, T\vec{v}) = \left(\sum_i u_i \vec{e}_i, \sum_j v_j \sum_l D_{lj}\vec{e}_l\right)$$

$$= \sum_{i,j,l} u_i^* v_j D_{lj}\delta_{il} = \sum_{i,j} u_i^* v_j D_{ij},$$

co w zapisie macierzowym daje

$$u^+ D v$$

Transformacja unitarna

Liniową transformację działającą w V nazywamy unitarną, jeśli $\forall \vec{u},\vec{v} \in V \ (T\vec{u}, T\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

Jeśli istnieje T^{-1}, warunek $(T\vec{u}, T\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ można zapisać inaczej:

$$(T\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, T^{-1}\vec{v}) \qquad (\vec{v} \to T^{-1}\vec{v})$$

Dla elementów macierzowych dostajemy (biorąc $\vec{u} = \vec{e}_j, \vec{v} = \vec{e}_i$)

$$\underbrace{D_{ij}^*}_{} = (D^{-1})_{ji}$$

$$D_{ji}^+ = (D^{-1})_{ji}$$

Hermitowska transformacja liniowa spełnia z definicji

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \; (Tu, v) = (u, Tv)$

Dla macierzy oznacza to, że $D^{+} = D$

Kompletna redukowalność

$$\vec{u} \in U \subset V \Rightarrow T(g)\vec{u} \in U$$

Podprzestrzeń U ma bazę $\{\vec{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, którą rozszerzamy o wektory $\{\vec{e}_i\}$, $i = m+1, \ldots, m+n$ do bazy całej V. Mając do dyspozycji iloczyn skalarny, możemy wybrać bazę ortonormalną. Wtedy dowolny wektor $\vec{w}$ w W rozpięty na wektorach $\vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_{m+n}$ jest ortogonalny do dowolnego $\vec{u} \in U$:

$$W = \{\vec{w} \in V \,|\, (\vec{w}, \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u} \in U\}$$

W niezależnym od wyboru bazy ujęciu kompletna redukowalność odpowiada zamkniętości W i U na działanie grupy. To ma zawsze miejsce, jeśli $T(g)$ są unitarne względem używanego iloczynu skalarnego.

$$\left(T(g)\vec{w}, \vec{u}\right) = \left(\vec{w}, T^{-1}(g)\vec{u}\right) =$$

$$= \left(\vec{w}, T(g^{-1})\vec{u}\right) = \left(\vec{w}, T(g')\vec{u}\right) =$$

$= \left(\vec{w}, \vec{u}'\right)$, gdzie $g' = g^{-1}$ oraz $T(g')\vec{u} = \vec{u}' \in U$

Dlatego $\left(T(g)\vec{w}, \vec{u}\right) = 0$

oraz $T(g)\vec{w} = \vec{w}' \in W$

Dlatego macierz $C(g)$ jest macierzą zerową

Twierdzenie Maschke

Wszystkie redukowalne reprezentacje skończonej grupy są kompletnie redukowalne

Dowód sprowadza się do pokazania, że dla skończonej (a nawet zwartej) grupy jest możliwe wybranie iloczynu skalarnego, względem którego rozważana reprezentacja jest unitarna

$$\{\vec{v}, \vec{v}'\} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(T(g)\vec{v}, T(g)\vec{v}'\right)$$

nowy iloczyn skalarny

Policzmy teraz $\{T(h)\vec{v}, T(h)\vec{v}'\}$, $h \in G$

$$\{T(h)\vec{v}, T(h)\vec{v}'\} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}{}' \left(T(g)T(h)\vec{v}, T(g)T(h)\vec{v}'\right) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}{}' \left(T(gh)\vec{v}, T(gh)\vec{v}'\right) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}{}' \left(T(g')\vec{v}, T(g')\vec{v}'\right) = \{\vec{v}, \vec{v}'\},$$

gdzie oczywiście $g' = gh$ przebiega wszystkie elementy G.

Dla nieskończonej grupy zwartej

$\sum_{g}{}' \longrightarrow \int d\mu(g)$ odpowiednia całka po nieskończenie wielu elementach grupy

Policzmy teraz $\{T(h)\vec{v}, T(h)\vec{v}'\}$, $h \in G$

$$\{T(h)\vec{v}, T(h)\vec{v}'\} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}{}^{\prime} (T(g)T(h)\vec{v}, T(g)T(h)\vec{v}') =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}{}^{\prime} (T(gh)\vec{v}, T(gh)\vec{v}') =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G}{}^{\prime} (T(g')\vec{v}, T(g')\vec{v}') = \{\vec{v}, \vec{v}'\},$$

gdzie oczywiście $g' = gh$ przebiega wszystkie elementy grupy G.

Istnienie sumy niezmienniczej $\sum_{g}{}^{\prime} = \sum_{g'}{}^{\prime}$ było kluczowe dla tej konstrukcji.

Reprezentacja $T(h)$ będzie realizowana jako redukowalna reprezentacja (powiedzmy $D'(h)$), jeśli wybierzemy bazę $\{f_i\}$, ortonormalną ze względu na grupowo niezmienniczy iloczyn skalarny, której pierwszych m elementów rozpina U. $D'(h)$ będzie powiązana z wyjściową macierzą $D(h)$ transformacją podobieństwa

$$D'(h) = S D(h) S^{-1},$$

gdzie S jest macierzą zmiany bazy z $\{f_i\}$ do $\{e_i\}$. Oznacza to, że reprezentacja D jest równoważna redukowalnej unitarnej reprezentacji D', która jest całkowicie redukowalna. 37'

Dla nieskończonej grupy zwartej można zastąpić $\sum_g$ przez $\int d\mu(g)$ grupowo-niezmiennicze całkowanie względem odpowiedniej miary $\mu(g)$.