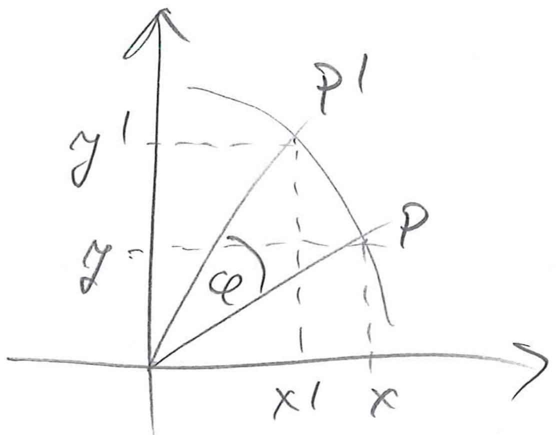
Wykład V

Grupy ciągłe

SO(2) "special orthogonal"
właściwe obroty w dwóch wymiarach, powiedzmy wokół osi z



$$z = re^{i\Theta} \leftrightarrow P$$
$$z' = re^{i\Theta'} \leftrightarrow P'$$
$$\Theta' = \Theta + \varphi$$
$$z' = re^{i(\Theta+\varphi)}$$

$$z' = (x' + iy') = re^{i\Theta}e^{i\varphi} = (x+iy)e^{i\varphi} =$$
$$= (x+iy)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= \underbrace{x\cos\varphi - y\sin\varphi}_{x'} + i\underbrace{(x\sin\varphi + y\cos\varphi)}_{y'}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{R(\varphi)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R(\varphi)\left(R(\varphi)\right)^T = \left(R(\varphi)\right)^T R(\varphi) = \mathbb{1}$$

$R(\varphi)$ - ortogonalna

$$\det\left(R(\varphi)\right) = 1 = \det(\mathbb{1})$$

Ściśle rzecz biorąc $R(\varphi)$ stanowią dwuwymiarową reprezentację abstrakcyjnej grupy, ale tzw. wierną reprezentację,

$$R(\varphi) = \mathbb{1} \iff \varphi = 0,$$

która jest izomorficzna z samą grupą!

Grupa $SO(2)$ jest abelowa

$$R(\varphi)R(\varphi') = R(\varphi + \varphi'), \text{ więc}$$

jej reprezentacje nieredukowalne powinny być jednowymiarowe!

$$D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi}$$

$m \in \mathbb{Z}$, aby $D^{(m)}(\varphi + 2\pi) = D^{(m)}(\varphi)$

Grupa $SO(2)$ jest zwarta (compact) z parametrem ($\varphi \in [0, 2\pi)$).

Średniowanie po grupie

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

Ortogonalność charakterów ma postać

$$\langle \chi^{(m)} | \chi^{(m')} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = \delta_{mm'}$$

Rozkład dwuwymiarowej reprezentacji definiującej $R(\varphi)$ na reprezentacje nieredukowalne

charakter $R(\varphi) = \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi$

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{im\varphi} \, 2\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \delta_{m,-1} + \delta_{m,1}$$

$$R = D^{(1)} \oplus D^{(-1)}$$

Szereg Clebscha-Gordana dla rozkładu iloczynu dwóch reprezentacji nieredukowalnych

$$D^{(m)} \otimes D^{(m')} = \bigoplus_{n} D^{(n)}$$

Ile jest składników w tej sumie?

Tylko jeden!

$D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$

$D^{(m')}(\varphi) = e^{-im'\varphi}$, $m' \in \mathbb{Z}$

$$\chi\left(D^{(m)} \otimes D^{(m')}\right) = \chi\left(D^{(m)}\right)\chi\left(D^{(m')}\right)$$

$$= e^{-i(m+m')\varphi}$$

Używamy charakterów, by przeprowadzić rozkład $D^{(m)} \otimes D^{(m')}$ na reprezentacje nieredukowalne

udział reprezentacji $D^{(n)}$ w $D^{(m)} \otimes D^{(m')}$ wynosi

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{-i(m+m')\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \delta_{n,m+m'}$$

Reprezentacja $D^{(m)} \otimes D^{(m')}$ jest więc nieredukowalną reprezentacją $D^{(m+m')}$

Generatory

Generatory grupy ciągłej (grupy Liego) są wprowadzane przez rozważenie elementów grupy bliskich $\mathbb{1}$

$$R(\varphi) = \mathbb{1} - i\varphi X + O(\varphi^2)$$

albo

$$-iX = \left.\frac{dR(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

X to infinitezymalny generator $SO(2)$ (Definicja słuszna w każdej reprezentacji)

W reprezentacji definiującej

$$-iX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

zachodzi

$$R(\varphi) = e^{-i\varphi X}$$

Jak wyglądają generatory dla reprezentacji nieredukowalnych $D^{(m)}(\varphi)$?

$$D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi}$$

$$\left.\frac{d(e^{-im\varphi})}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = -im \equiv -iX^{(m)}$$

$$\Rightarrow X^{(m)} = m$$

Jak X jest reprezentowany w mechanice kwantowej?

Obrót w przestrzeni fizycznej indukuje odpowiednią transformację w przestrzeni funkcji falowych

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x}) \equiv \psi(r, \Theta)$$ na płaszczyźnie

$$(1 - i\varphi\hat{X})\psi(r, \Theta) = \psi(r, \Theta - \varphi)$$

(φ - infinitezymalnie małe)

$$\psi(r, \Theta - \varphi) = \psi(r, \Theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}(-\varphi) + \dots$$

$$-i\varphi\hat{X}\psi(r, \Theta) = -\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}$$

$$i\hat{X}\psi(r, \Theta) = \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}$$

$$\hat{X}\psi(r, \Theta) = -i\frac{\partial\psi}{\partial\Theta} = \frac{\hat{J}_z}{\hbar}$$

$\hat{J}_z$ - operator dla składowej z orbitalnego momentu pędu

SO(3) i jej związek z SU(2)

Grupa właściwych rotacji (bez odbić przestrzennych) w trzech wymiarach. Reprezentacja definiująca obejmuje macierze 3 x 3 $R_{\hat{n}}(\varphi)$ (jedna z możliwości), które opisują zmianę współrzędnych (x, y, z) wskutek obrotu o kąt φ wokół osi zadanej przez jednostkowy wektor $\hat{n}$

Jakie macierze są ortogonalne i mają wyznacznik równy 1. Mogą być w sposób ciągły otrzymane z przekształcenia identycznościowego

Generatory infinitezymalne

$R_3(\varphi)$ – obroty wokół osi z

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-iX_3 = \frac{dR_3}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1(\varphi)$ – obroty wokół osi x

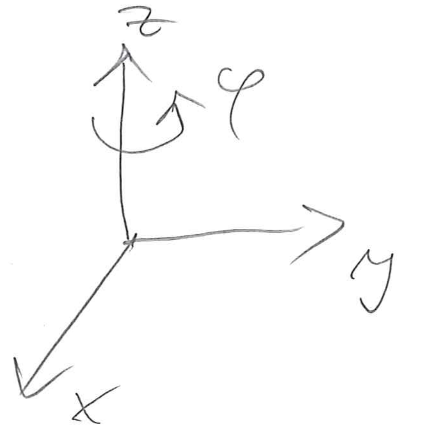
$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$-iX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

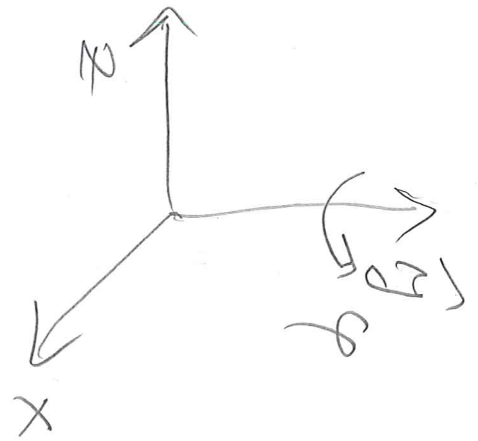
$R_2(\varphi)$ – obroty wokół osi y

$$R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$! uwaga

$$-iX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

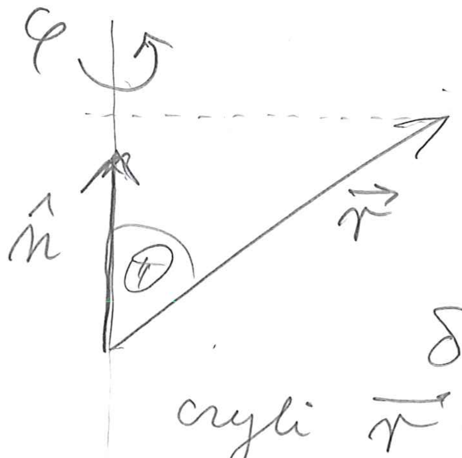
$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

Rozważamy zmianę współrzędnych spowodowaną przez rotację o mały kąt φ wokół osi $\hat{n}$



$\otimes$ $\delta\vec{r}$ jest skierowany za płaszczyznę rysunku

$$\delta\vec{r} = \hat{n} \times \varphi\vec{r}$$

czyli $\vec{r}\,' = \vec{r} + \varphi(\hat{n} \times \vec{r})$

Na współrzędnych oznacza to

niejawna suma po j, k

$$r_i' = r_i + \varphi \varepsilon_{ikj} n_k r_j =$$
$$= r_i - \varphi \varepsilon_{ijk} n_k r_j =$$
$$= (\delta_{ij} - \varphi \varepsilon_{ijk} n_k) r_j$$

niejawna suma po k

$$(R_n(\varphi))_{ij} = \delta_{ij} - \varphi \varepsilon_{ijk} n_k$$

Porównując z ogólnym zapisem dla generatora

$$(R_n(\varphi))_{ij} \approx \delta_{ij} - i\varphi(X(\hat{n}))_{ij}$$

dostajemy $-\varphi \varepsilon_{ijk} n_k = -i\varphi(X(\hat{n}))_{ij}$

niejawna suma po k

$$(X(\hat{n}))_{ij} = -i\varepsilon_{ijk} n_k = n_k (X_k)_{ij}$$

$$X(\hat{n}) = \hat{n} \cdot \vec{X}$$

Można pokazać, że kartezjańskie elementy macierzowe trzech generatorów można zapisać w postaci

$$(X_k)_{lj} = -i\,\varepsilon_{ljk} \leftarrow \text{symbol Levi-Civity}$$

Struktura zbudowana przez generatory infinitezymalne to tzw. algebra Lie

① $R_{\hat{n}}(\varphi) = e^{-i\hat{n}\cdot\vec{X}\varphi}$, więc kombinacja liniowa generatorów jest także generatorem, z czego wynika, że generatory tworzą przestrzeń wektorową

② Komutator macierzy jest przypadkiem tzw. nawiasu Liego, który spełnia warunki

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- dwuliniowości

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z]$$

$$[Z, \alpha X + \beta Y] = \alpha [Z, X] + \beta [Z, Y]$$

- antysymetryczności

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

- tożsamości Jacobiego

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Relacje komutacji między generatorami grupy są więc kluczowe dla określenia algebry.

Dla $SO(3)$ $[X_l, X_j] = i\varepsilon_{ljk} X_k$

łatwo to sprawdzić, korzystając z wzoru $(X_k)_{lj} = -i\varepsilon_{ljk}$

oraz z własności symbolu Levi-Civity

$$\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{pil}\varepsilon_{ljk} = \delta_{pj}\delta_{ik} - \delta_{pk}\delta_{ij}$$

Twierdzenie

Wszystkie obroty o ten sam kąt wokół różnych osi obrotu stanowią jedną klasę sprzężenia i dlatego mogą być oznaczane jednym parametrem, φ.

W reprezentacji definiującej zachodzi

$$\chi^{[3]}(\varphi) = 2\cos\varphi + 1,$$

co widać oczywiście dla macierzy R_1, R_2 i R_3.

Nieredukowalne reprezentacje SO(3)

Obroty o skończony kąt można uzyskać przez obroty o kąt nieskończenie mały, opisywane przez generatory

Dlatego znalezienie reprezentacji nieredukowalnych SO(3) oznacza znalezienie reprezentacji nieredukowalnych algebry SO(3), czyli nieredukowalnych macierzy spełniających

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k$$

To jest standardowy problem mechaniki kwantowej!

Szukamy wartości własnych i wektorów własnych operatorów składowych momentu pędu $\hat{J}_i$, które można utożsamić z generatorami $\hat{X}_i$: $\hat{\vec{J}} = \hbar \hat{\vec{X}}$.

Reprezentacje nieredukowalne są indeksowane wartościami własnymi $j(j+1)\hbar^2$ kwadratu operatora momentu pędu

$$\hat{\vec{J}}^2 \equiv \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$$

Wewnątrz reprezentacji nieredukowalnej określonej liczbą j, elementy macierzowe generatorów są dane w postaci

$$\langle j m' | X_3 | j m \rangle = m \, \delta_{m'm}$$

$$\langle j m' | X_+ | j m \rangle = \left[(j-m)(j+m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m', m+1}$$

$$\langle j m' | X_- | j m \rangle = \left[(j+m)(j-m+1) \right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m', m-1}$$

$$X_\pm \equiv X_1 \pm i X_2$$

Wartości własne X_{3} (m) zmieniają się od $+j$ do $-j$ z krokiem 1, przyjmując $(2j+1)$ wartości. Ta wielkość $(2j+1)$ jest wymiarem reprezentacji i musi być liczbą całkowitą dodatnią. Z tego jednak nie wynika, że j musi być całkowite! Przynajmniej nie wynika to z samych relacji komutacji, które dopuszczają połówkowe wartości j.

Te połówkowe wartości j nie mogą zostać zrealizowane przez operatory różniczkowe działające na funkcje falowe, gdzie wymagana jest okresowość 2π

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \varphi\hat{n}\times\vec{r}) \simeq$$
$$(1 - \varphi\hat{n}\times\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{r}) =$$
$$= \left[1 - i\varphi\hat{n}\cdot\frac{\vec{L}}{\hbar}\right]\psi(\vec{r}),$$

gdzie $\vec{L} \equiv \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$,

ale są realizowane jako macierze!

Związek między SU(2) i SO(3)

Związki komutacji dla generatorów SO(3),

$$[X_j, X_l] = i\varepsilon_{jlk} X_k,$$

mogą być zrealizowane przez <u>macierze</u> 2×2. Wybierając

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mamy mianowicie ($J_i \equiv \frac{1}{2}\sigma_i$)

$$[J_j, J_l] = i\varepsilon_{jlk} J_k \quad , J_i \equiv X_i$$

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$

$$\vec{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\vec{\sigma}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_\pm = \frac{1}{2}\sigma_\pm$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

$$\frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}(X_+ + X_-)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_2 = -\frac{1}{2} i (X_+ - X_-)$$

Trzy generatory X_i są macierzami hermitowskimi 2×2 bezśladowymi.
Tworzą bazę dla wszystkich macierzy tego typu, które mają ogólną postać

$$H = \begin{pmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{pmatrix} =$$

$$= a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3$$

$$U = \exp\left(-\frac{1}{2} i \theta \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right), \quad |\vec{n}| = 1$$

$$U = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

To jest ogólna postać macierzy $SU(2)$!

To można porównać z tym, co mamy dla $SO(3)$ $\quad |\vec{n}| = 1$

$$R = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{X}}, \quad \vec{n} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$R = \mathbb{1} + \sin\theta\, W + (1-\cos\theta) W^2$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ U i R są podobnie sparametryzowane przez $\vec{n}$ i (4), więc możemy rozważyć homomorfizm

$$M : SU(2) \to SO(3)$$

$$U(2\pi) = -\mathbb{1}_{2\times 2}, \quad R(2\pi) = \mathbb{1}_{3\times 3}$$

$$U(4\pi) = \mathbb{1}_{2\times 2}$$

Jądro homomorfizmu M

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

to centrum $SU(2)$, tworzące normalną podgrupę izomorficzną z $\mathbb{Z}_2$

Dlatego $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$

$$R = e^{-i\varphi \vec{n}\cdot\vec{X}} = e^{\varphi \vec{n}\cdot(-i\vec{X})}$$

$$|\vec{n}| = 1 \, , \varphi \in \mathbb{R}$$

$$-iX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad -iX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-iX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dowód wzoru Rodriguesa na macierz obrotu

$$\vec{n}\cdot(-i\vec{X}) \equiv A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1+n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -1+n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -1+n_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -A$$
$$A^4 = -A^2$$
$$A^5 = A$$
$$A^6 = A^2$$
$$A^7 = -A$$
$$A^8 = -A^2$$
$$A^9 = A$$
$$A^{10} = A^2 \text{ itd}$$

$$R = e^{\varphi A}$$

$$R = \mathbb{1} + \varphi A + \frac{(\varphi A)^2}{2!} + \frac{(\varphi A)^3}{3!} + \frac{(\varphi A)^4}{4!} + \frac{(\varphi A)^5}{5!} + \frac{(\varphi A)^6}{6!} + \frac{(\varphi A)^7}{7!} + \dots$$

$$R = \mathbb{1} + \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) A + \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\varphi^8}{8!} + \dots\right) A^2$$

$$R = \mathbb{1} + \sin\varphi\, A + \Big(1 \underbrace{- 1 + \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\varphi^8}{8!} + \dots}_{-\cos\varphi}\Big) A^2$$

$$R = \mathbb{1} + \sin\varphi\, A + (1 - \cos\varphi) A^2$$

charaktery

w reprezentacji o wymiarze $(2j+1)$ indeksowanej przez j, macierz X_3 jest diagonalna

$$X_3 = \begin{pmatrix} j & & & & 0 \\ & j-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -j+1 & \\ 0 & & & & -j \end{pmatrix}$$

$$R_3(\varphi) = e^{-iX_3\varphi} =$$
$$\operatorname{diag}\left(e^{-ij\varphi}, e^{-i(j-1)\varphi}, \dots, e^{-i(-j+1)\varphi}, e^{ij\varphi}\right)$$

$$\operatorname{Tr}\left(R_3(\varphi)\right) = \chi^{(j)}(\varphi) = \dots$$ suma wyrazów ciągu geom.

$$= e^{-ij\varphi} \frac{1 - e^{i(2j+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}$$

To nie tylko charakter dla obrotu o kąt φ wokół osi z, ale także charakter dla całej klasy sprzężenia, czyli dla dowolnego obrotu o kąt φ.

Ten zwarty wynik wygodnie jest jednak zapisać osobno dla całkowitych $j = l$

$$\chi^{(l)}(\varphi) = 1 + 2\sum_{m=1}^{l} \cos(m\varphi)$$

oraz dla j połówkowego, gdy $j = s = n + \frac{1}{2}$

$$\chi^{(s)}(\varphi) = 2\sum_{m=0}^{n} \cos\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\varphi\right)$$

Ortogonalność charakterów i miara inwariantna w SO(3)

Co zastępuje $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ w przypadku SO(3)?

W zasadzie wystarczy nam zastąpienie

$\frac{1}{|G|}\sum_i k_i$ (sumy po klasach sprzężenia)

k_i — liczba elementów w klasie sprzężenia K_i

To ułatwia znalezienie odpowiedniej miary, bo w SO(3) klasy są indeksowane pojedynczym kątem φ.

$$\frac{1}{|G|}\sum_i k_i \longrightarrow \int d\mu(\varphi)$$

$d\mu(\varphi)$ — miara do całkowania po φ

Ta miara musi spełniać warunek "niezmienniczości", który dla grup skończonych miał postać $\sum\limits_{g\in G}{}' \ldots = \sum\limits_{g'\in G}{}' \ldots$, gdzie $g' = hg$, a h jest ustalonym elementem grupy.

Teraz, dla miary $\mu(\varphi)$ powinno zachodzić

$$\int d\mu(\varphi) \ldots = \int d\mu(\varphi') \ldots ,$$

gdzie w drugiej mierze każda rotacja $R_n(\varphi)$ jest pomnożona przez dowolny ustalony obrót S

$$R_{n'}(\varphi') = S R_n(\varphi)$$

Dodatkowo, $d\mu(\varphi)$ musi spełniać

$$\int d\mu(\varphi) = 1.$$

Twierdzenie

Miara spełniająca powyższe warunki ma postać

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}{}' \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi (1-\cos\varphi)$$

Dla sprawdzenia policzmy iloczyn skalarny charakterów $\chi^{(j)}$ i $\chi^{(j')}$

$$\langle \chi^{(j)} | \chi^{(j')} \rangle =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\, 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \; \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \; \frac{\sin(j'+\frac{1}{2})\varphi'}{\sin(\frac{1}{2}\varphi')}$$

$$= \dots = \delta_{jj'}$$

Szereg Clebscha-Gordana

W mechanice kwantowej nazywamy to "dodawaniem momentów pędu". Jeśli dodajemy momenty pędu j_1 i j_2, to w wyniku dostajemy wartości j od $|j_1-j_2|$ do j_1+j_2 z krokiem równym 1.

W języku teorii grup oznacza to, że

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \oplus\, D^{(j)}$$

Dowód ortogonalności charakterów dla SO(3)

$\sin\alpha \sin\beta = ?$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$$\langle \chi^{(j)} | \chi^{(j')} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (1-\cos\varphi) \frac{\sin((j+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \frac{\sin((j'+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi \, \sin(j'+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)\, \sin(\frac{1}{2}\varphi)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \, 2\sin(j+\tfrac{1}{2})\varphi \, \sin(j'+\tfrac{1}{2})\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \left(\cos(j-j')\varphi - \cos(j+j'+1)\varphi\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} 2\pi, & j=j' \\ \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k_1}\sin(k_1\varphi)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k_2}\sin(k_2\varphi)\Big|_0^{2\pi}, & k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \; j \neq j' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & j=j' \\ 0, & j\neq j' \end{cases} = \delta_{jj'}$$

Użyjemy charakterów, aby udowodnić twierdzenie o dodawaniu momentów pędu ($j_1 \geq j_2$)

$$\chi^{(j_1)}(\varphi)\,\chi^{(j_2)}(\varphi) =$$

$$= \frac{\sin(j_1+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\;\frac{\sin(j_2+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} =$$

$$= \frac{e^{i(j_1+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1+\frac{1}{2})\varphi}}{2i\sin\frac{1}{2}\varphi}\sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}\varphi}\sum_{m=-j_2}^{j_2}\left(e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1-m+\frac{1}{2})\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}\varphi}\sum_{m=-j_2}^{j_2}\left(e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\sum_{m=-j_2}^{j_2} \sin(j_1+m+\tfrac{1}{2})\varphi$$

$$= \sum_{m=-j_2}^{j_2}\frac{\sin(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = (j_1+m \equiv j)$$

$$= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2}\frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} =$$

$$= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2}\chi^{(j)}(\varphi)$$

Współczynniki Clebscha-Gordana

$|j_1 m_1\rangle$

$|j_2 m_2\rangle$

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$$

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \, |(j_1 j_2) j m\rangle =$$

$$= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} C(j_1 j_2 j; m_1, m_2, m) \, |(j_1 j_2) j m\rangle$$

Współczynniki CG mogą być znalezione na podstawie struktury grupy, ale ich określenie wymaga bardziej szczegółowych informacji niż te dane przez charaktery.
Zależą od szczegółowego wyboru bazy.
W przypadku SO(3) współczynniki CG mogą być wybrane jako rzeczywiste przy odpowiednim wyborze fazy, ale to jeszcze nie wyczerpuje wszystkich możliwości.

Równanie

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \, |(j_1 j_2) j m\rangle$$

jest transformacją między dwoma bazami: $\{|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle\}$ i $\{|(j_1 j_2) j m\rangle\}$. Dla ustalonych j_1, j_2 każda baza zawiera $(2j_1+1)(2j_2+1)$ wektorów. W każdej bazie są to wektory ortogonalne, gdyż są wektorami własnymi do różnych wartości własnych operatorów hermitowskich

$$\langle j_1 m_1'; j_2 m_2' | j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \delta_{m_1' m_1} \delta_{m_2' m_2}$$

$$\langle (j_1 j_2) j' m' | (j_1 j_2) j m\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

Możemy zapisać $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$ jako iloczyn skalarny

$$C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) =$$
$$= \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle$$

Ponieważ wyraża to transformację między bazami ortonormalnymi, C rozumiana jako macierz, której pierwszym indeksem jest para $(m_1 m_2)$ a drugim indeksem para (jm), jest unitarna, a nawet ortogonalna.

Dlatego

$$\sum_{m_1, m_2}' c(j_1 j_2 j'; m_1, m_2 m') \, c(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

(ortogonalność drugiej bazy $|(j_1 j_2) j m\rangle$ i zupełność pierwszej bazy $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$)

oraz

$$\sum_{j, m}' c(j_1 j_2 j; m_1' m_2' m) \, c(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

(ortogonalność pierwszej bazy i zupełność drugiej bazy)

Dlatego możemy zapisać przy pomocy tych samych współczynników CG relację odwrotną

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1, m_2}' c(j_1 j_2 j; m_1, m_2, m) \, |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle,$$

która pokazuje, jak stany całkowitego momentu pędu są zbudowane ze stanów własnych poszczególnych momentów pędu.

Ponieważ $\vec{\hat{J}}_3 = \hat{\vec{J}}_{1,3} + \hat{\vec{J}}_{2,3}$, więc zachodzi $m = m_1 + m_2$!

Praktyczne wyznaczanie współczynników CG zaczyna się od zbudowania stanu $|(j_1 j_2) j j\rangle$ z maksymalnym m

$$\hat{J}_+ |(j_1 j_2) j j\rangle = 0 \text{, gdzie}$$

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_{1,+} + \hat{J}_{2,+}$$

Po określeniu $|(j_1 j_2) j j\rangle$, kombinacje odpowiadające innym m, $j > m \geq -j$ są znajdowane przez kolejne działanie operatora $\hat{J}_-$

Przykład

$$D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$$

$$j_1 = j_2 = \frac{1}{2} \quad , \; j = 1, 0$$

Przypisanie $|1 1\rangle = |\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$

stan z $m_1 + m_2 = 1$

Tu już jest wybór fazy; mogliśmy wziąć fazę zespoloną lub rzeczywistą ze znakiem -1!

zaczynamy więc od równania

$$|1\,1\rangle = |\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\rangle$$

i działamy na lewą stronę $\hat{J}_-$
zgodnie z wzorem

$$\hat{J}_-|j\,m\rangle = \left[(j+m)(j-m+1)\right]^{\frac{1}{2}}|j,\,m-1\rangle$$

(tu też jest wybór fazy)

Na prawą stronę działamy $\hat{J}_-$
zapisanym jako $\hat{J}_- = \hat{J}_{1,-}\otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1\otimes\hat{J}_{2,-}$

Daje to

$$\sqrt{2}\,|1\,0\rangle = |-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Działając $\hat{J}_-$ na $|1\,0\rangle$ dostajemy

$$\sqrt{2}\,|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\sqrt{2}\,|1,-1\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{2}\,|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1,-1\rangle = |-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Otrzymaliśmy $|1\,1\rangle, |1\,0\rangle$ i $|1\,-1\rangle$
i możemy odczytać niektóre wartości
współczynników CG.

Brak jest stanu $|00\rangle$

Musi on być kombinacją liniową stanów z $m=0$:

$$|00\rangle = \alpha\left|\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

ale ortogonalną (bo różne j) do stanu $|10\rangle$

Stan $|00\rangle$ musi też spełniać

$$\hat{J}_-|00\rangle = 0.$$

$$0 = \alpha\left|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle =$$

$$= (\alpha+\beta)\left|-\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle \Rightarrow \alpha = -\beta$$

Po unormowaniu i kolejnym wyborze fazy dostajemy

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\langle 00|10\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\langle\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right| - \left\langle-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right|\right)\left|\left(\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+0-0-1) = 0$$