Wykład VI

Operatory tensorowe i twierdzenie Eckarta-Wignera

W mechanice kwantowej liczymy często elementy macierzowe $\langle \psi | W | \varphi \rangle$.

Stany $|\varphi\rangle$ i $|\psi\rangle$ mogą być na przykład stanami niezaburzonego hamiltonianu H_0, który jest niezmienniczy względem pewnej symetrii, w szczególności względem obrotów $SO(3)$. Bardzo dużo można dowiedzieć się o $\langle \psi | W | \varphi \rangle$, jeśli znamy sposób zachowania W przy obrotach!

Najprostsza sytuacja: W nie zmienia się przy obrotach $SO(3)$, $W = S$ ← operator skalarny

$$U(R)\, S\, (U(R))^{-1} = S$$

albo

$$U(R)\, S = S\, U(R)$$

albo

$$[\hat{X}_i, S] = 0 \quad , \; i = 1,2,3$$

$\hat{X}_i$ – generatory $SO(3)$

To daje także $[\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2, S] = 0$!

Dla tego przypadku mamy bardzo proste reguły wyboru

a) $$[X_3, S] = 0$$

$$\langle j'm'|[X_3, S]|jm\rangle = 0$$

$$\langle j'm'|X_3 S|jm\rangle - \langle j'm'|S X_3|jm\rangle = 0$$

$$m'\langle j'm'|S|jm\rangle - \langle j'm'|S|jm\rangle m = 0$$

$$(m'-m)\langle j'm'|S|jm\rangle = 0 \Rightarrow m' = m$$

b) $$[S, \vec{X}^2] = 0$$

$$\langle j'm'|S\vec{X}^2 - \vec{X}^2 S|jm\rangle = 0$$

$$j(j+1)\langle j'm'|S|jm\rangle = \langle j'm'|\vec{X}^2 S|jm\rangle =$$

$$= j'(j'+1)\langle j'm'|S|jm\rangle$$

$$(j-j')(j+j'+1)\langle j'm'|S|jm\rangle = 0$$

$j^2+j-j'^2-j' \overset{?}{=} j^2 + \cancel{jj'} + j - \cancel{j'j} - j'^2 - j'$ ok

$$\Rightarrow j = j'$$

c) zachodzi także

$$\langle j'm'|S|jm\rangle = N_j \delta_{jj'}\delta_{mm'},$$

co oznacza, że element macierzowy zależy tylko od j, a nie zależy od m!

Wynika to z relacji $[S, \hat{X}_\pm] = 0$

Policzmy $\langle jm|\hat{X}_+ S|jm-1\rangle$:

$$\langle jm|\hat{X}_+ S|jm-1\rangle = \langle jm|S\hat{X}_+|jm-1\rangle$$

$$(\hat{X}_+)^\dagger = \hat{X}_-$$

$$[(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}}\langle jm-1|S|jm-1\rangle$$

$$= \langle jm|S|jm\rangle[(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}},$$

więc $\langle jm-1|S|jm-1\rangle = \langle jm|S|jm\rangle$.

Podobnie, licząc $\langle jm|\hat{X}_- S|jm+1\rangle$, dostaniemy

$$\langle jm+1|S|jm+1\rangle = \langle jm|S|jm\rangle.$$

$U(R)$ unitarny operator indukowany w przestrzeni stanów kwantowych przez obrót R.

Stany $|jm\rangle$ stanowią bazę nieredukowalnej reprezentacji $SO(3)$ (szerzej $SU(2)$) w przestrzeni stanów kwantowych. Dlatego wynik $U(R)|jm\rangle$ nie może wyprowadzić nas poza przestrzeń stanów rozpiętych na wektorach

$|j\,-j\rangle, |j\,-j+1\rangle, \ldots, |j\,j-1\rangle, |j\,j\rangle$.

$$U(R)|jm\rangle = \underbrace{\sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|}_{\mathbb{1}} U(R)|jm\rangle =$$

$$= \sum_{m'} \underbrace{\langle jm'|U(R)|jm\rangle}_{D^j_{m'm}(R)} |jm'\rangle$$

macierz D-Wignera

$$= \sum_{m'} D^j_{m'm}(R)|jm'\rangle$$

Nieredukowalny operator tensorowy T^j_m

Definicja

$$U(R)\,T^j_m\,(U(R))^{-1} = \sum_{m'} D^j_{m'm}(R)\,T^j_{m'}$$

Policzmy $U(R)\left(T^J_M|jm\rangle\right)$

$$U(R)\,T^J_M|jm\rangle =$$

$$\underbrace{U(R)\,T^J_M\,(U(R))^{-1}}_{\sum_{M'} D^J_{M'M}(R)\,T^J_{M'}}\;\underbrace{U(R)|jm\rangle}_{\sum_{m'} D^j_{m'}(R)|jm'\rangle} =$$

Oznacza to, że mamy do czynienia z transformacją przy obrocie R taką, jak dla stanów $|JM\rangle \otimes |jm\rangle$ iloczynu prostego reprezentacji $D^{(J)} \otimes D^j$.

Z takich stanów iloczynowych $|JM\rangle \otimes |jm\rangle$ można przy pomocy współczynników Clebscha-Gordana zbudować stany $|j'm'\rangle$ z reprezentacji $D^{j'}$.
Jest więc to także możliwe dla stanów $T^J_M|jm\rangle$!

$$|j'm'\rangle = (N_{Jjj'})^{-1} \sum_{m,M} c(Jjj';M,m,m') \, T^J_M |jm\rangle$$

Ta stała może zależeć od operatora tensorowego oraz od J, j i j', ale ze względu na właściwości transformacyjne nie zależy od M, m i m'

$$N_{Jjj'} |j'm'\rangle = \sum_{m,M} c(Jjj';M,m,m') T^J_M |jm\rangle$$

Teraz uwaga!
Mnożę obie strony przez

$$c(J\,j\,j';M''m''m') = \langle j'm' | J\,M''j\,m''\rangle$$
$$= \langle J\,M''j\,m'' | j'm'\rangle$$

$$N_{Jjj'} |j'm'\rangle \langle j'm' | J\,M''j\,m''\rangle =$$

$$\sum_{m,M} \langle J\,M''j\,m'' | j'm'\rangle \langle j'm' | J M j m\rangle T^J_M |jm\rangle$$

Sumujemy obie strony po j' i m'
Po lewej stronie mamy

$$L = \sum_{j',m'} N_{Jjj'} |j'm'\rangle \, c(J\,j\,j';M''m''m')$$

Po prawej stronie powstaje

$$P = \sum_{m,M}{}' \sum_{j',m'}{}' T^J_M |jm\rangle \langle J''M''j''m''|j'm'\rangle \langle j'm'|JMjm\rangle$$

$$= \sum_{m,M} T^J_M |jm\rangle \underbrace{\langle J''M''j''m''|JMjm\rangle}_{\delta_{MM''}\delta_{mm''}}$$

$$= T^J_{M''}|jm''\rangle$$

$$\sum_{j',m'}{}' N_{Jjj'} |j'm'\rangle c(Jjj';M''m''m') = T^J_{M''}|jm''\rangle$$

$$\langle j'''m'''|T^J_{M''}|jm''\rangle =$$

$$\sum_{j',m'}{}' N_{Jjj'} c(Jjj';M''m''m') \underbrace{\langle j'''m'''|j'm'\rangle}_{\delta_{j'''j'}\delta_{m'''m'}}$$

$$\langle j'''m'''|T^J_{M''}|jm''\rangle = N_{Jjj'''} c(Jjj''';M''m''m''')$$

lub z mniejszą liczbą "primów"

$$\boxed{\langle j'm'|T^J_M|jm\rangle = N_{Jjj'} c(Jjj';Mmm')}$$

$$\langle j'm' | T^J_M | jm \rangle = N_{Jjj'}\, C(Jjj'; Mmm')$$

To jest treść twierdzenia Eckarta-Wignera

Zwykle używany zapis:

$$\langle j'm' | T^J_M | jm \rangle = \underbrace{\langle j' \| T^J \| j \rangle}_{\text{tzw. zredukowany element macierzowy}} \, C(Jjj'; Mmm')$$

M, m, m' występują wyłącznie (!) w współczynniku Clebscha-Gordana

Przykłady T^J_M

a) $S = T^0_0$

b) operator wektorowy $\hat{\vec{V}}$ ma sferyczne składowe T^1_m, $m = -1, 0, 1$, gdzie

$$T^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x - i\hat{V}_y)$$

$$T^1_0 = \hat{V}_z$$

$$T^1_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x + i\hat{V}_y)$$

Sam $\hat{\vec{X}}$ jest operatorem wektorowym!

Dla operatora wektorowego warunek

$$U(R)\,T^1_m\,(U(R))^{-1} =$$
$$= \sum_{m'} D^1_{m'm}(R)\,T^1_{m'}$$

jest równoważny warunkowi zapisanemu we współrzędnych kartezjańskich

$$\left[\hat{X}_l, \hat{V}_j\right] = i\,\epsilon_{ljk}\,\hat{V}_k$$

Dlaczego tw. Eckarta jest tak ważne?
Znając element zredukowany bardzo łatwo dostajemy wszystkie przypadki $\langle j'm'|T^J_M|jm\rangle$.
Aby wyznaczyć $\langle j'\|T^J\|j\rangle$ wystarczy policzyć jeden przypadek

Przykład

$$\langle \tfrac{1}{2}\|\sigma^1\|\tfrac{1}{2}\rangle = ?$$

$$\langle \tfrac{1}{2}m'|\sigma^1_M|\tfrac{1}{2}m\rangle$$

składowa sferyczna wektora $\vec{\sigma} = (\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z}_{\text{macierze Pauliego}})$

$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Bierzemy najłatwiejszy do policzenia przypadek

$$\langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|\sigma^1_0|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|\underbrace{\sigma_z|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle} =$$

$$= \langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = 1$$

Ponieważ $C(1\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2};0\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

więc

$$\langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|\sigma^1_0|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \langle \tfrac{1}{2}\|\sigma^1\|\tfrac{1}{2}\rangle\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \tfrac{1}{2}\|\sigma^1\|\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{3}$$

Inne przypadki wymagają już tylko znajomości współczynników Clebscha-Gordana:

$$\langle \tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}|\sigma^1_{-1}|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{3}\,C(1\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2};-1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$$

$$\langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}|\sigma^1_1|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{3}\,C(1\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2};1,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

$$\langle \tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}|\sigma^1_0|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{3}\,C(1\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2};0,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$$

Jak tw. Eckarta-Wignera działa dla $S = T^0_0$?

$$\langle j'm' | T^0_0 | jm \rangle = \langle j' \| T^0 \| j \rangle \underbrace{c(0jj';0mm')}_{\delta_{jj'}\delta_{mm'}}$$

Przykłady

(1) Dipolowe reguły wyboru

$\langle n'l'm' | \vec{r} | nlm \rangle$ biorą się z tego, że operatorem odpowiedzialnym za przejścia elektromagnetyczne jest iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot \vec{r}$

$\vec{r}$ – operator wektorowy

$\langle n'l'm' | r_M | nlm \rangle =$

$\langle n'l' \| r \| nl \rangle \, c(1ll'; Mmm')$

Kiedy ten element macierzowy nie jest zerem, mówimy o przejściach dozwolonych!

Same współczynniki pozwalają na

i) $\Delta l = l' - l = \pm 1, 0$

ii) $\Delta m = 0$ dla $\vec{E} \parallel \vec{z}$, gdy $\vec{E} \cdot \vec{r} \sim r_0 = z$

$\Delta m = \pm 1$ dla $\vec{E} \perp \vec{z}$, gdy $\vec{E} \cdot \vec{r} \sim r_{\pm 1}$

Dodatkowo można pokazać (najłatwiej rozważając kwestię parzystości), że przejścia z $\Delta l = 0$ są zabronione!

② Czynnik Landé'go w sprzężeniu $\vec{L}\cdot\vec{S}$

Rozważamy moment magnetyczny elektronu w atomie wodoropodobnym, który ma orbitalny moment pędu $\vec{L}$ oraz spin $s = \frac{1}{2}$.

Ważne: stany są klasyfikowane wart. wł. całkowitego momentu pędu, „j”,

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Różne współczynniki żyromagnetyczne dla $\vec{L}$ i dla $\vec{S}$

$$\vec{\mu}_l = \frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{m_e}\vec{S}$$

Chcemy policzyć wartości oczekiwane

$\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_e}\vec{L} + \frac{e}{m_e}\vec{S} = \frac{e}{2m_e}(\vec{L} + 2\vec{S})$$

$$= \frac{e}{2m_e}(\vec{J} + \vec{S})$$

Policzenie elementów macierzowych $\langle jm|\hat{\vec{J}}|jm\rangle$ jest łatwe, bo mamy do czynienia ze stanami własnymi $\hat{\vec{J}}$

Co zrobić z elementami macierzowymi $\hat{\vec{S}}$?

$$\langle jm|\hat{J}^2|jm\rangle =$$

$$= \langle jm|\sum_M (-1)^M J_M J_{-M}|jm\rangle =$$

$$= \sum_{j'm'}\sum_M (-1)^M \underbrace{\langle jm|J_M|j'm'\rangle}_{\sim \delta_{jj'}} \overbrace{\langle j'm'|J_{-M}|jm\rangle}^{\sim \delta_{jj'}}$$

$$= \sum_M (-1)^M \langle j\|J\|j\rangle\, c(1jj;M\,m-M\,m)$$

$$\langle j\|J\|j\rangle\, c(1jj;-M,m,m-M)$$

$$= \sum_M (-1)^M c(1jj;M,m-M,m)\, c(1jj;-M,m,m-M)$$

$$\stackrel{H}{=} \langle j\|\hat{J}\|j\rangle \langle j\|\hat{J}\|j\rangle = H \langle j\|\hat{J}\|j\rangle \langle j\|\hat{J}\|j\rangle$$

$$\langle jm|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}|jm\rangle = \langle jm|\sum_M (-1)^M S_M J_{-M}|jm\rangle$$

$$= \ldots = H\langle j\|\hat{S}\|j\rangle\langle j\|\hat{J}\|j\rangle$$

$H \equiv H(j,m)$ jest takie samo dla $\hat{J}^2$ i $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}$

Dlatego

$$\frac{\langle jm|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{J}^2|jm\rangle} = \frac{\langle j\|\hat{S}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}\|j\rangle}$$

$$\frac{\langle jm|\vec{S}\cdot\vec{J}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{J}^2|jm\rangle} = \frac{\langle j\|\vec{S}\cdot\vec{J}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}^2\|j\rangle} = \frac{\langle j\|\hat{S}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}|j\rangle}$$

Tw. E-W : współczynniki CG się upraszczają

Znowu z tw. E-W mamy

$$\frac{\langle jm|\hat{S}_M|jm\rangle}{\langle jm|\hat{J}_M|jm\rangle} = \frac{\langle j\|\hat{S}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}\|j\rangle}$$

$$\langle jm|\hat{S}|jm\rangle = \langle jm|\hat{J}|jm\rangle \frac{\langle j\|\hat{S}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}\|j\rangle}$$

$$= \langle jm|\hat{J}|jm\rangle \frac{\langle j\|\vec{S}\cdot\vec{J}\|j\rangle}{\langle j\|\hat{J}^2\|j\rangle}$$

Jak policzyć $\langle j\|\vec{S}\cdot\vec{J}\|j\rangle$?

Trick:

$$\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$$

$$\hat{L}^2 = \hat{J}^2 + \hat{S}^2 - 2\hat{\vec{S}}\cdot\vec{J}$$

$$\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}} = \frac{1}{2}\left(\hat{J}^2 + \hat{S}^2 - \hat{L}^2\right)$$

$$\boxed{[\hat{S},\hat{J}]=0}$$

$$\langle j\|\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{J}}\|j\rangle = \frac{1}{2}\left[s(s+1)+j(j+1)-l(l+1)\right]$$

$$\langle j\|\hat{J}^2\|j\rangle = j(j+1)$$

$$\langle\vec{\mu}\rangle = \frac{e}{2m_e}\underbrace{\left(1+\frac{s(s+1)+j(j+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}\right)}_{g}\langle\hat{\vec{J}}\rangle$$

Dla pojedynczego elektronu $s=\frac{1}{2}$ $j=l\pm\frac{1}{2}$

$$g=\begin{cases}(j+\frac{1}{2})/j, & j=l+\frac{1}{2}\\(j+\frac{1}{2})/(j+1), & j=l-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Przypominam, że w notatniku
dowod_klasy_rownowaznosci_dla_grupy_SO3.nb
udowodniliśmy w istocie
następujące twierdzenie o obrotach:

$R_{\hat{n}}(\alpha)$ - obrót o kąt α wokół osi zadanej przez wektor $\hat{n}$, gdzie $\hat{n}\cdot\hat{n}=1$

S - dowolny obrót

Zachodzi

$$S R_{\hat{n}}(\alpha) S^{-1} = R_{S\hat{n}}(\alpha)$$

Jest to obrót o kąt α wokół obróconej osi zadanej przez wektor $S\hat{n}$

Szkic dowodu

Niech zachodzi

$$R_{\hat{n}}(\alpha)\vec{v} = \vec{v}' \quad (*)$$

W takim razie

$$\left(S R_{\hat{n}}(\alpha) S^{-1}\right)\left(S\vec{v}\right) =$$

$$= S R_{\hat{n}}(\alpha)\vec{v} = S\vec{v}' \quad (**)$$

Porównując równania $(*)$ i $(**)$, widzimy, że $R_{\hat{n}}(\alpha)$ zmienia $\vec{v}$ w $\vec{v}'$, a obrót $S R_{\hat{n}}(\alpha) S^{-1}$ zmienia $S\vec{v}$ w $S\vec{v}'$.

W takim razie oba obroty, $R_{\hat{n}}(\alpha)$ i $S R_{\hat{n}}(\alpha) S^{-1}$ reprezentują obrót o ten sam kąt. W drugim przypadku cała przestrzeń wektorów zostaje najpierw w całości obrócona przez S.

W szczególności oś obrotu $\hat{n}$ dla $R_{\hat{n}}(\alpha)$ została także obrócona przez S! Można to potwierdzić, zauważając, że wektor osi obrotu pozostaje niezmieniony przez obrót. $R_{\hat{n}}(\alpha)\hat{n} = \hat{n}$

$$\left(S R_{\hat{n}}(\alpha) S^{-1}\right)\left(S\hat{n}\right) = S R_{\hat{n}}(\alpha)\hat{n} = S\hat{n}$$

Ogólny obrót jest często zapisywany przy pomocy kątów Eulera

$$R(\varphi, \Theta, \psi) = e^{-iX_3''\psi} e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3\varphi},$$

gdzie obrót o kąt φ wokół osi $\hat{z}$ jest pierwszy, potem jest obrót o kąt Θ wokół nowej osi $\hat{y}$, a na końcu następuje obrót o kąt ψ wokół nowej osi z.

Można pokazać, że obrót $R(\varphi, \Theta, \psi)$ może być wyrażony przez rotacje wokół ustalonych osi

$$R(\varphi, \Theta, \psi) = e^{-iX_3\varphi} e^{-iX_2\Theta} e^{-iX_3\psi}$$

Dowód:

Korzystamy z pomocniczego twierdzenia: $\hat{S} R_{\hat{n}}(\alpha) \hat{S}^{-1}$ jest obrotem o kąt α wokół obróconej osi opisanej przez wektor $\hat{S}\hat{n}$.

$$e^{-iX_3''\psi} = e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3\psi} e^{iX_2'\Theta}$$

$$R(\varphi, \Theta, \psi) = e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3\psi} e^{iX_2'\Theta} e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3\varphi}$$

$$R(\varphi,\Theta,\psi) = e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3\psi} e^{-iX_3\varphi}$$

$$= e^{-iX_2'\Theta} e^{-iX_3(\psi+\varphi)}$$

$$e^{-iX_2'\Theta} = e^{-iX_3\varphi} e^{-iX_2\Theta} e^{iX_3\varphi}$$

$$R(\varphi,\Theta,\psi) = e^{-iX_3\varphi} e^{-iX_2\Theta} e^{iX_3\varphi} e^{-iX_3(\varphi+\psi)}$$

$$R(\varphi,\Theta,\psi) = e^{-iX_3\varphi} e^{-iX_2\Theta} e^{-iX_3\psi}$$

To jest standardowa forma dla zapisu macierzy obrotu $D^{(j)}$,

$$D^{(j)}_{m'm}(\varphi,\Theta,\psi) = e^{-im'\varphi} D^{j}_{m'm}(R_2(\Theta)) e^{-im\psi}$$

$$d^{j}_{m'm}(\Theta) = D^{j}_{m'm}(R_2(\Theta))$$

$\uparrow$ zredukowana macierz D

działającej w przestrzeni stanów $|jm\rangle$ rozpinających nieredukowalną reprezentację SO(3) (SU(2)).

Zastanawiałem się, dlaczego zachodzi

$$\langle jm' | e^{-iX_3\varphi} W | jm\rangle =$$

$$= e^{-im'\varphi} \langle jm' | W | jm\rangle \quad ?$$

Dowód wynika wprost z definicji sprzężenia hermitowskiego:

$$A^{+}_{ij} = (A_{ji})^{*} \iff A_{ji} = (A^{+}_{ij})^{*}$$

W notacji Diraca

$$\langle j | A | i\rangle = (\langle i | A^{+} | j\rangle)^{*}$$

$$\underbrace{\langle jm' |}_{j} \underbrace{e^{-iX_3\varphi} W}_{A} \underbrace{| jm\rangle}_{i} =$$

$$= (\langle jm | W^{+} e^{iX_3\varphi} | jm'\rangle)^{*} =$$

$$= (\langle jm | W^{+} | jm'\rangle e^{im'\varphi})^{*} =$$

$$= (\langle jm | W^{+} | jm'\rangle)^{*} e^{-im'\varphi} =$$

$$= \langle jm' | W | jm\rangle e^{-im'\varphi}$$

Jak postaje macierz $D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$ odpowiadająca zwyczajnemu obrotowi w przestrzeni trójwymiarowej

$$R(\alpha,\beta,\gamma) \Longleftrightarrow e^{-i\alpha \hat{J}_z} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\gamma \hat{J}_z}$$

$$\equiv \underbrace{\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)}_{\text{operator w mechanice kwantowej}}$$

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = {}_z\langle j m' | \hat{R}(\alpha,\beta,\gamma) | j m \rangle_z$$

oś $\hat{z}$ jest osią kwantyzacji

Jak przedstawić stan

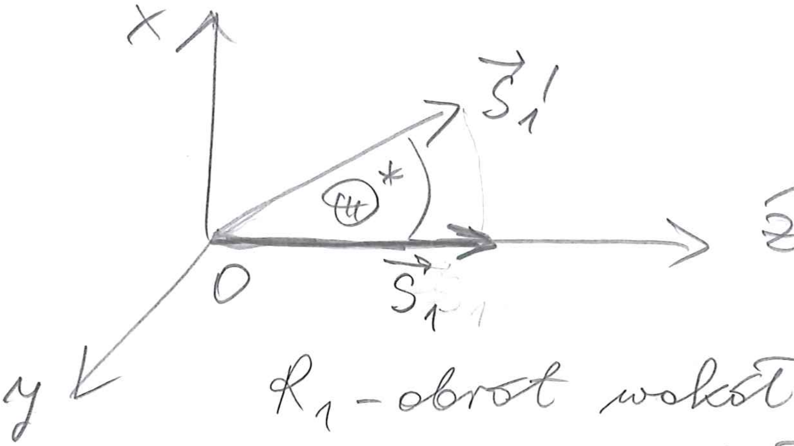
$|j m\rangle_{\vec{s}_2}$ ← oś kwantyzacji równoległa do wersora $\vec{s}_2$

przy pomocy stanów $|j m\rangle_z$?

$$|j m\rangle_{\vec{s}_2} = \hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|j m\rangle_z$$

$\vec{S}_2 \equiv (\sin\Theta^*\cos\phi^*, \sin\Theta^*\sin\phi^*, \cos\Theta^*)$

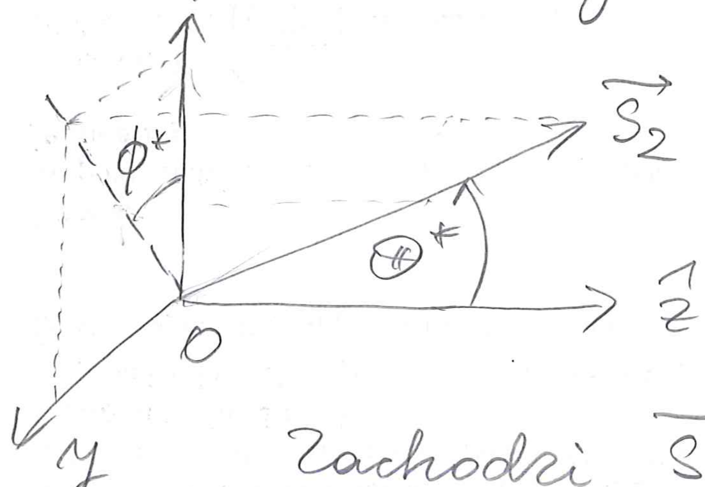
$\vec{S}_1 = (0,0,1) \equiv \hat{z}$



R_1 - obrót wokół osi $\hat{y}$ o kąt Θ^*

R_2 - obrót wokół osi $\hat{z}$ o kąt ϕ^*

To są obroty aktywne wokół nieruchomych osi!



Zachodzi $\vec{S}_2 = \underbrace{R_2 R_1}_{R(\alpha,\beta,\gamma)} \vec{S}_1$

$\gamma = 0$

$\beta = \Theta^*$

$\alpha = \phi^*$

$$|jm\rangle_{\vec{s}_2} = \sum_{m'} \underbrace{|jm'\rangle_z \, {}_z\langle jm'|}_{\mathbb{1}} \hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle_z$$

$$\equiv \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,|jm'\rangle_z$$

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im'\alpha} \underbrace{d^{j}_{m'm}(\beta)}_{\in\mathbb{R}} e^{-im\gamma}$$

$$d^{j}_{m'm}(\beta) \equiv \langle jm'|e^{-i\beta\hat{J}_y}|jm\rangle$$

Dla $j=\frac{1}{2}$ łatwo policzyć $e^{-i\beta\hat{J}_y}$

$$= e^{-i\beta\frac{1}{2}\sigma_2}$$

Zachodzi

$$e^{-\frac{1}{2}i\beta\hat{y}\cdot\vec{\sigma}} = e^{-\frac{1}{2}i\beta\sigma_2} =$$

$$= \cos\frac{\beta}{2}\,\mathbb{1} - i\sin\frac{\beta}{2}\,\sigma_2 =$$

$$= \cos\frac{\beta}{2}\,\mathbb{1} - \sin\frac{\beta}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & 0\\ 0 & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

W takim razie

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \cos\frac{\beta}{2}$$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = -\sin\frac{\beta}{2}$$

$$(0\ 1)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sin\frac{\beta}{2}$$

$$(0\ 1)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\beta}{2}$$

Zachodzi

$$d^{j}_{m'm} = (-1)^{m-m'} d^{j}_{mm'} = d^{j}_{-m,-m'}$$

$$d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = -d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{i\frac{1}{2}\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{1}{2}\gamma}$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{i\frac{1}{2}\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{1}{2}\gamma}$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = -e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{1}{2}\gamma}$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{1}{2}\gamma}$$

Ponieważ $|(j_1 j_2) j m\rangle =$

$$= \sum_{m_1, m_2}' C(j_1 j_2 j; m_1, m_2 m) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

możemy policzyć macierze $D^j_{m'm}$ dla większych wartości j systematycznie budując na najprostszej nietrywialnej reprezentacji $j = \frac{1}{2}$

$$D^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j m' | U(R) | j m\rangle =$$

$$= \sum_{m_1, m_1'}' C(j_1 j_2 j; m_1' m_2' m)\, C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m) \langle j_2 m_2' | \langle j_1 m_1' | U(R) | j_1 m_1\rangle | j_2 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_1'}' C(j_1 j_2 j; m_1' m_2' m)\, C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)\, D^{(j_2)}_{m_2' m_2}(R)\, D^{(j_1)}_{m_1' m_1}(R)$$