

Wykres VII

Równanie Schrödingera (RS) dla
bezsponowej cząstki o masie m
z energią potencjalną V jest zapisywane
zwykle w formie równania różniczkowego

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

To jest jednak tylko jedna z wielu
możliwości, by przedstawić abstrakcyjne
RS, które opisuje zachowanie cząstki
w potencjalnym polu sił (tzw.
reprezentacja pozycyjna)

Postać ogólna RS

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi, \text{ gdzie}$$

Ψ - wektor w przestrzeni Hilberta \mathcal{H}
 \hat{H}_0, \hat{V} - liniowe operatory odpowiadające
energii kinetycznej i potencjalnej
działające na wektory w \mathcal{H}

Oryg jest \mathcal{H} ?

$$a, b \in \mathcal{H} \Rightarrow a + b \in \mathcal{H}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ a, b \in \mathcal{H} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha a + \beta b \in \mathcal{H}$$

$(a, b) = (b, a)^* \in \mathbb{C}$ iloczyn skalarny

$(a, a) = \|a\|^2$ kwadrat normy a

A - operator liniowy w \mathcal{H} , jeśli

$$\left. \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ a, b \in \mathcal{H} \end{array} \right\} \Rightarrow A(\alpha a + \beta b) = \alpha Aa + \beta Ab$$

A - hermitowski, jeśli

$$a, b \in \mathcal{H} \Rightarrow (Aa, b) = (a, Ab)$$

Notacja Diraca

$$a \rightarrow |a\rangle$$

$$(a, b) \rightarrow \langle a|b\rangle$$

$$(b, Aa) \rightarrow \langle b|A|a\rangle$$

A - hermitowski, jeśli $(\langle b|A|a\rangle)^* = \langle a|A|b\rangle$
dla dowolnych $a, b \in \mathcal{H}$

własności operatorów hermitowskich

1. jeśli $A|a\rangle = \alpha|a\rangle \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

2.
$$\left. \begin{array}{l} A|a\rangle = \alpha|a\rangle \\ A|b\rangle = \beta|b\rangle \\ \alpha \neq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \langle b|a\rangle = 0$$

3. wektory własne A tworzą bazę ortogonalną w \mathcal{H}

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots$

$\mathcal{H} \ni a = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle$

jeśli baza jest ortonormalna, wtedy

$\alpha_i = \langle e_i | a \rangle$, więc dowolny wektor z \mathcal{H} można zapisać

w postaci

$$|v\rangle = \sum_i v_i |e_i\rangle = \sum_i \langle e_i | v \rangle |e_i\rangle$$

$$= \sum_i |e_i\rangle \langle e_i | v \rangle$$

dzięki jednemu operatorowi identyfikacyjnemu $\mathbb{1}$

$$|v\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{1}|v\rangle = |v\rangle$$

Wybór bazy nie jest jednoznaczny

$$|v\rangle = \sum_i v_i |e_i\rangle, \quad v_i = \langle e_i | v \rangle$$

$$|v\rangle = \sum_i v_{i'} |e_{i'}\rangle, \quad v_{i'} = \langle e_{i'} | v \rangle$$

Jak otrzymać $\langle e_{i'} | v \rangle$?

1) Bezpośrednio

$$2) \langle e_{i'} | v \rangle = \sum_j \langle e_{i'} | e_j \rangle \langle e_j | v \rangle,$$

zakładając, że znamy $\langle e_j | v \rangle$ i $\langle e_{i'} | e_j \rangle$

Podobnie: jak liczyć $\langle e_{i'} | A | e_j \rangle$?

1) Bezpośrednio

$$2) \langle e_{i'} | A | e_j \rangle = \sum_k \sum_m \langle e_{i'} | e_k \rangle \langle e_k | A | e_m \rangle \langle e_m | e_j \rangle$$

Nas będą interesować dwie bazy

$|e_i\rangle$ - stany własne operatora położenia

$|e_{i'}\rangle$ - stany własne operatora pędu

Operator położenia $\hat{x} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\hat{x} |r\rangle = x |r\rangle, \quad \hat{y} |r\rangle = y |r\rangle, \quad \hat{z} |r\rangle = z |r\rangle$$

Operator pędu $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$

$$\hat{p}_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle, \hat{p}_y |\vec{p}\rangle = p_y |\vec{p}\rangle, \hat{p}_z |\vec{p}\rangle = p_z |\vec{p}\rangle$$

Problemy formalne: mamy nieprzeliczalnie wiele stanów $|\vec{r}\rangle$ i $|\vec{p}\rangle$. Nie możemy oznaczać ich 1, 2, 3, ... (chyba że zdecydujemy się zamknąć układ w skończonej objętości)

$$1 = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \rightarrow \int d^3\vec{r} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|$$

$$1 = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \rightarrow \int d^3\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$$

Normalizacja stanów

$$\langle e_i | e_j \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z')$$

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') = \delta(p_x - p_x') \delta(p_y - p_y') \delta(p_z - p_z')$$

trojwymiarowa delta Diraca

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0)$$

Muszą być spełnione relacje komutacji

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = i\hbar \mathbb{1}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$$

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar \mathbb{1}$$

etc.

Należy je rozumieć w taki sposób, że dla dowolnych stanów $|\phi\rangle$ i $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | [\hat{x}, \hat{p}_x] | \phi \rangle = i\hbar \langle \psi | \phi \rangle$$

Rozważmy przykłady ważnych elementów macierzowych

$$\langle \vec{r} | \hat{x} | \vec{r}' \rangle = x \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\langle \vec{r} | \hat{p}_x | \vec{r}' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\langle \vec{p} | \hat{x} | \vec{p}' \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\langle \vec{p} | \hat{p}_x | \vec{p}' \rangle = p_x \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

etc.

Korzystając z tych wyników, otrzymujemy

$$\langle \vec{r} | (\hat{p}_x)^2 | \psi \rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(\vec{r}), \text{ jeśli } \psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$\langle \vec{r} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r} | \hat{V} | \psi \rangle &= \int d^3 \vec{r}' \langle \vec{r} | \hat{V} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \psi \rangle \\
&\equiv \int d^3 \vec{r}' \langle \vec{r} | \hat{V} | \vec{r}' \rangle \psi(\vec{r}') = \\
&= V(\vec{r}) \psi(\vec{r}), \text{ jeśli } \langle \vec{r} | V | \vec{r}' \rangle = \\
&= V(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\
&\text{(warunek na lokalny potencjał!)}
\end{aligned}$$

Aby przejść z reprezentacji pozycyjnej do reprezentacji pędowej potrzebujemy

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) |\psi\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\langle \vec{p} | \psi \rangle}_{\hat{\Psi}(\vec{p})} = \langle \vec{p} | \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) |\psi\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{\Psi}(\vec{p}) + \int d^3 \vec{p}' \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle \hat{\Psi}(\vec{p}')$$

w istocie więc $\hat{\Psi}(\vec{p})$ jest wynikiem trójwymiarowej transformaty Fouriera $\psi(\vec{r})$!

Od tego momentu dla ułatwienia będziemy używać

$$c = \hbar = 1$$

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\hbar c \approx 197.327 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

Oznacza to, że pęd i energia wyrażane będą w MeV lub fm^{-1} , a czas i położenie w fm lub MeV^{-1}

$$\langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p}' \rangle = \int d^3 \vec{r} \int d^3 \vec{r}'$$

$$\langle \vec{p}' | \vec{r} \rangle \langle \vec{r}' | \hat{V} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \vec{p}' \rangle = \dots =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r} e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}} V(\vec{r}),$$

zakładając, że \hat{V} jest lokalny

Ważny przykład:

$$V(\vec{r}) = \frac{b}{r} e^{-\mu r} \quad \text{potencjał Yukawy}$$

$$[r] = \text{fm}, \quad [\mu] = \text{fm}^{-1}, \quad [e^{-\mu r}] = 1$$

$$\left[\frac{b}{r} \right] = \text{MeV} \text{ lub } \text{fm}^{-1}$$

$$[b] = 1 \quad (b \text{ musi być bezwymiarowe})$$

$$\langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p}' \rangle = \frac{b}{2\pi^2} \frac{1}{\mu^2 + q^2} \quad |q| \equiv |\vec{p}' - \vec{p}|$$

Niezależnie od czasu równanie
Schrödingera

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}) |\psi\rangle \equiv \hat{H} |\psi\rangle$$

Jeśli \hat{H} nie zależy jawnie od czasu,
szukamy rozwiązania w postaci

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle e^{-iEt}$$

gdzie $|\psi_0\rangle$ nie zależy od czasu,
a wielkość E jest stała.

Zachodzi

$$\hat{H} |\psi_0\rangle = E |\psi_0\rangle$$

Dwie możliwości:

- 1) stany związane
 E przyjmuje ściśle określone
wartości
- 2) stany rozproszeniowe
 E dane przez warunki
eksperymentalne (na przykład
energia uzyskana przez cząstkę
w akceleratorze)

Naszym celem jest układ dwóch nukleonów. Na razie mamy pojedynczą cząstkę w potencjale...



Dla dwóch cząstek o masach m_1 i m_2 będziemy potrzebowali stanów iloczynowych określających położenia lub pędy dwóch cząstek

$|\vec{r}_1\rangle, |\vec{r}_2\rangle$ stany położeniowe cząstek

$|\vec{p}_1\rangle, |\vec{p}_2\rangle$ stany pędowe cząstek

$$|\vec{r}_1\rangle |\vec{r}_2\rangle \equiv |\vec{r}_1 \vec{r}_2\rangle$$

$$|\vec{p}_1\rangle |\vec{p}_2\rangle \equiv |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$$

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | \vec{r}_1' \vec{r}_2' \rangle = \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \delta^3(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')$$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_1' \vec{p}_2' \rangle = \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_1') \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_2')$$

Dodatkowe reguły komutacji

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_{x_1}] = i\hbar \mathbb{1} = [\hat{x}_2, \hat{p}_{x_2}]$$

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_{x_2}] = [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = [\hat{p}_{x_1}, \hat{p}_{x_2}] = 0 \text{ etc.}$$

Tak jak w mechanice klasycznej wprowadzamy

$$\hat{\vec{r}} = \hat{\vec{r}}_2 - \hat{\vec{r}}_1 \quad \text{operator położenia względnego}$$

$$\hat{\vec{p}} = \frac{m_1 \hat{\vec{p}}_2 - m_2 \hat{\vec{p}}_1}{m_1 + m_2} \quad \text{operator pędu względnego}$$

$$\hat{\vec{R}} = \frac{m_1 \hat{\vec{r}}_1 + m_2 \hat{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{operator położenia środka masy (CM)}$$

$$\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{p}}_2 \quad \text{operator pędu całkowitego}$$

Można pokazać, że zachodzi

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \mathbb{1} = [\hat{X}, \hat{P}_x]$$

$$[\hat{x}, \hat{X}] = [\hat{x}, \hat{Y}] = 0 \text{ etc.}$$

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}$$

$$\langle \vec{R} | \vec{P} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}}$$

$|\vec{r}\rangle, |\vec{p}\rangle, |\vec{R}\rangle, |\vec{P}\rangle$ są stanami własnymi operatorów $\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{R}}$ i $\hat{\vec{P}}$

Energia kinetyczna dzieli się na
dwie części

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \dots = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}^2}{2M}$$

gdzie $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $M = m_1 + m_2$

masa
zredukowana

masa
całkowita

pojedyncza cząstka \longrightarrow dwie cząstki

$$(H_0 + \hat{V}) |\Psi_{12}\rangle = E |\Psi_{12}\rangle$$

Zakładamy, że \hat{V} zależy tylko od położenia i pędu względnego i dochodzimy do dwóch równań

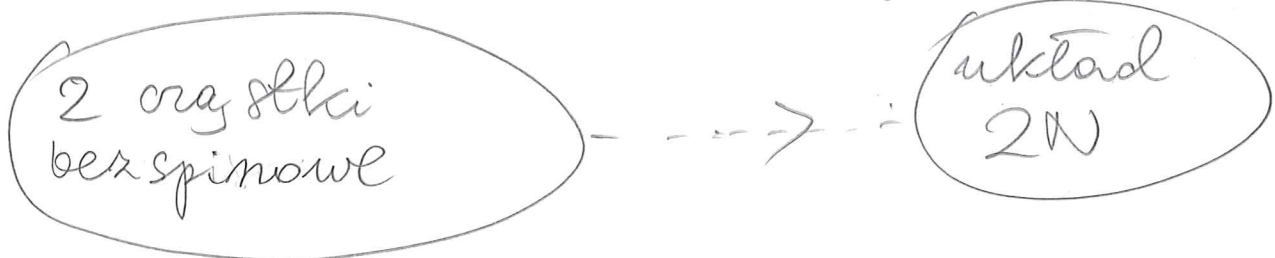
$$\frac{\vec{p}^2}{2\mu} \langle \vec{p} | \Psi_{rel} \rangle + \int d\vec{p}' \langle \vec{p} | \hat{V} | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \Psi_{rel} \rangle = (E - E_{cm}) \langle \vec{p} | \Psi_{rel} \rangle$$

$$\frac{\vec{P}^2}{2M} \langle \vec{P} | \Psi_{cm} \rangle = E_{cm} \langle \vec{P} | \Psi_{cm} \rangle$$

$\langle \vec{P} / \Psi_{int} \rangle$ spełnia RS, które ma tę samą formę jak RS dla pojedynczej cząstki o masie μ w potencjale \hat{V}

Równanie na $\langle \vec{P} / \Psi_{cm} \rangle$ opisuje ruch swobodny cząstki o masie M , więc znamy jego rozwiązanie w postaci fali płaskiej.

Możemy więc skupić się na równaniu dotyczącym ruchu względnego i zabrać, że $E_{cm} = 0$ (powiemy dla deuteronu w spoczynku)



Nukleony mają spin $\frac{1}{2}$ $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$

Dodatkowo, zanedbując małą różnicę między masą protonu (M_p) i masą neutronu (M_n), możemy traktować proton i neutron jak dwa stany tadeukowe (spinu izotopowego \equiv izospinu) jednej cząstki - nukleonu

$$|\vec{p}_1\rangle \rightarrow |\vec{p}_1 \underbrace{\frac{1}{2} m_1}_{\text{spin}} \underbrace{\frac{1}{2} \nu_1}_{\text{isospin}}\rangle$$

$$|\vec{p}_2\rangle \rightarrow |\vec{p}_2 \frac{1}{2} m_2 \frac{1}{2} \nu_2\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \nu\rangle = \begin{cases} \text{proton, } \nu = \frac{1}{2} \\ \text{neutron, } \nu = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

wektory barowe są postaci

$$|\vec{p}_1 m_1 \nu_1\rangle |\vec{p}_2 m_2 \nu_2\rangle$$

lub lepiej (skoro pęd całkowity jest zachowany)

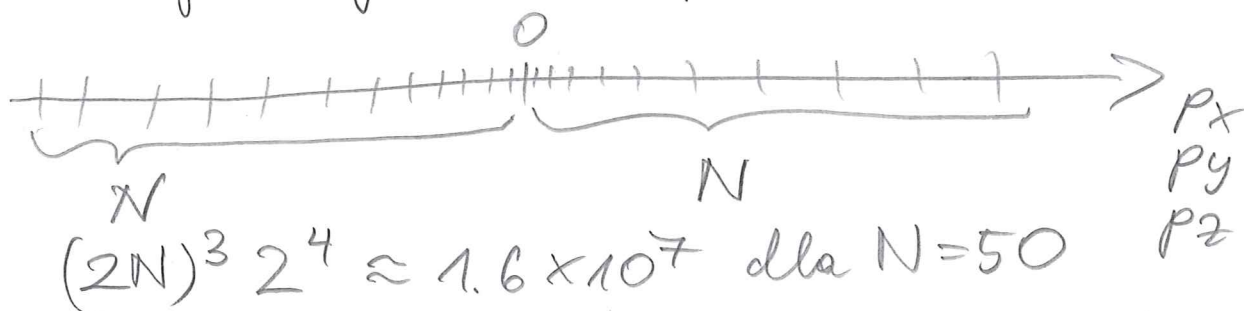
$$|\vec{P} \vec{P} m_1 \nu_1 m_2 \nu_2\rangle$$

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \hat{V}\right) |\Psi_{rel}\rangle = E_{rel} |\Psi_{rel}\rangle$$

To równanie chcemy rozwiązać (zwykle niestety numerycznie) dla ustalonego \vec{P} , na przykład dla $\vec{P}=0$.

Oznacza to konieczność określenia

$\langle \vec{p} m_1 \nu_1 m_2 \nu_2 | \Psi_{rel} \rangle$ choćby na pewnej siatce punktów



Jaki "mały" problem własny

$$Ax = \lambda x$$

Zadanie jest wykonalne, ale można lepiej wybrać wektory bazowe!

Wprowadzamy stany całkowitego spinu i izospinu dwóch nukleonów

$$|\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) s m_s\rangle = \sum_{m_1} c\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} s; m_1, m_s - m_1, m_s\right) \left|\frac{1}{2} m_1\right\rangle \left|\frac{1}{2} m_s - m_1\right\rangle$$

$$|\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) t m_t\rangle = \sum_{\nu_1} c\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} t; \nu_1, m_t - \nu_1, m_t\right) \left|\frac{1}{2} \nu_1\right\rangle \left|\frac{1}{2} m_t - \nu_1\right\rangle$$

i korzystamy z informacji (w zasadzie eksperymentalnej), że $\hat{H}_{rel} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \hat{V}$ zachowuje t, m_t i s

Oznacza to, że możemy osobno rozpatrywać różne przypadki.

W gorszym z nich ($s=1$) mamy

$(2N)^3$ 3 wartości (3×10^6 dla $N=50$)

$$\langle \vec{p} s m_s t m_t | \Psi_{rel} \rangle$$

(z pewnością wykonalne, bo sam się tym zajmowałem!)

Okazuje się, że można pracować z tą barą $|\vec{p}, s, m_s, t, m_t\rangle$ i zredukować problem własny do rozmiaru ≈ 200 .

To jest pokazane w pracy Phys. Rev. C 81, 034006 (2010), gdzie wykorzystano tzw. "postać operatorową" deuteronu. Typowy przykład wykorzystania teorii grup.

My chcemy wykorzystać grupę $SU(2)$, więc zbudujemy jeszcze inne stany barowe: stany parcjalne dla układu $2N$.

Najpierw zamiast $|\vec{p}\rangle$ wzięjemy stanów $|\rho, l, m_l\rangle$

↓
długość pędu względnego
 $p \equiv |\vec{p}|$

↑ ↓
orbitalny moment pędu rzut orbitalnego momentu pędu na wybraną oś kwantyzacji

własności stanów $|plm\rangle$

$$\hat{p}^2 |plm\rangle = p^2 |plm\rangle$$

$$\hat{H}_0 |plm\rangle = \frac{p^2}{2\mu} |plm\rangle$$

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} \quad \text{orbitalny moment pędu}$$

$$\hat{L}^2 |plm\rangle = l(l+1) |plm\rangle$$

$$\hat{L}_z |plm\rangle = ml |plm\rangle$$

$$\langle \hat{p}' | plm \rangle = \frac{\delta(|\hat{p}'| - p)}{p^2} Y_{lm}(\hat{p}')$$

↑
harmonika
sferyczna

$$\hat{p}' \equiv (\sin\theta' \cos\phi', \sin\theta' \sin\phi', \cos\theta')$$

trzy składowe kartezjańskie
zadane przez dwa kąty θ' i ϕ'

wywołam zapisu

$$Y_{lm}(\hat{p}') \equiv Y_{lm}(\theta', \phi')$$

zwykła notacja,
wywołana także w
programie Mathematica®

Ortogonalność

$$\langle p' l' m_{l'} | p l m_l \rangle = \frac{\delta(p-p')}{p^2} \delta_{ll'} \delta_{m_l m_{l'}}$$

zupelnosc

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^l \int dp p^2 |p l m_l \rangle \langle p l m_l| = \mathbb{1}$$

Dobrowe stany barowe dla układe dwóch nukleonów

$$|p(l s) j m_j \rangle \equiv \sum_{m_l=-l}^l c(l s j; m_l, m_j - m_l, m_j) |p l m_l \rangle |(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) j m_j - m_l \rangle$$

są stanami własnymi operatora całkowitego momentu pędu $\hat{j} \equiv \hat{L} + \hat{s}$

Orbitalny moment pędu sprzęga się ze spinem dwóch nukleonów, dając całkowity moment pędu układu.

To właśnie całkowity moment pędu decyduje o zachowaniu się układu przy obrotach.

Można się także spodziewać, że oddziaływanie \hat{V} będzie zależało od spinu i izospinu!

Niektóre potencjały są przygotowane bezpośrednio w przestrzeni pędowej.

Do tej grupy należą potencjały nukleon-nukleon wyprowadzane w ramach tzw. chiralnej efektywnej teorii pola, w szczególności te wyprowadzane przez E. Epelbauma (potencjały grupy Bochum-Bonn).

Najprostszy z nich (otrzymany w "leading order of the chiral expansion") ma postać

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}^{LO} | \vec{p} \rangle = - \left(\frac{g_A}{2F_\pi} \right)^2 \frac{\vec{q} \cdot \vec{\sigma}_1 \vec{q} \cdot \vec{\sigma}_2}{m_\pi^2 + \vec{q}^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

$$+ C_S \uparrow^{\text{spin}} \otimes \uparrow^{\text{isospin}} + C_T \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \uparrow^{\text{isospin}},$$

gdzie

m_π - masa pionu (średnia)

g_A - stała określająca intensywność oddziaływania pion-nukleon

F_π - stała rozpadu pionów (π^\pm)

C_S, C_T - stałe, które należy określić na podstawie danych doświadczalnych

$\vec{\sigma}_i$ ($\vec{\tau}_i$) - operator spinu (izospinu) dla nukleonu nr i

$$\vec{q} \equiv \vec{p}' - \vec{p}$$

W takim razie uzupełniamy stany barowe $|p(Ls)jm_j\rangle > 0$ stany irospinowe (bez sprężenia!)

$$\rightarrow |p(Ls)jm_j; tmt\rangle \equiv |p\alpha_2\rangle$$

Drugiego dożyliśmy do tych stanów?

$$\langle p'\alpha_2' | \hat{H}_0 | p\alpha_2 \rangle = \frac{p^2}{2\mu} \frac{\delta(p-p')}{p^2} \delta_{\alpha_2'\alpha_2}$$

$$\langle p'\alpha_2' | \hat{V} | p\alpha_2 \rangle = f(p', p, l', l, s, s', t, mt)$$

$$\delta_{j'j} \delta_{s's} \delta_{t't} \delta_{m't'mt} \delta_{m_j'm_j} \underbrace{\delta_{(-1)^{l'}(-1)^l}}_{\text{zachowanie parzystości}}$$

Stany $|p\alpha_2\rangle$ mają określoną parzystość $\pi = (-1)^L$

Dają także prosty wynik, gdy zamienimy miejscami nukleony 1 i 2

$$|sms\rangle \rightarrow (-1)^{s+1} |sms\rangle$$

$$|tmt\rangle \rightarrow (-1)^{t+1} |tmt\rangle$$

$$|p\alpha_2\rangle \rightarrow (-1)^{L+t+s} |p\alpha_2\rangle$$

To musi być równe -1 dla układu identycznych fermionów

Reprezentujúce ukľadač 2N
 potrebujeme týchto stavov,
 ktoré spĺňajú valenciu

$$(-1)^{L+S+T} = -1$$

$t=1$

L	S	J	
0	0	0	1S_0
1	1	0	3P_0
1	1	1	3P_1
2	0	2	1D_2

itd.

$t=0$

L	S	J	
1	0	1	1P_1
0	1	1	3S_1
2	1	1	3D_1
2	1	2	3D_2

itd.

notácie $2s+1 L_j$, gdje

- $L=0 \leftrightarrow S$
- $L=1 \leftrightarrow P$
- $L=2 \leftrightarrow D$
- $L=3 \leftrightarrow F$

w obliczeniach numerycznych
zastępujemy całkę przez sumę
o skończonej liczbie składników.

Na przykład w metodzie Gaussa-
Legendre'a

$$\int_{-1}^1 dx f(x) \rightarrow \sum_{i=1}^{N_1} w_i f(x_i)$$

\uparrow wagi \uparrow punkty

Różne odwzorowania mogą
prowadzić z $(-1, 1)$ do (a, b)

Jeśli $-\infty < a < b < +\infty$,

można użyć najprostszej (liniowej)
transformacji

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$$

$$w_i \rightarrow \hat{w}_i = \frac{b-a}{2} w_i$$

$$\int_a^b dy g(y) \approx \sum_{i=1}^{N_1} \hat{w}_i g(\hat{x}_i)$$

Praktyczne obliczenia stanu związanego dwóch nukleonów

- 1) Pojedynczy (nie sprzężony) kanał
z ustalonym l, s, t oraz j .

Do tej pory nie ma informacji,
choć trwają spekulacje na
temat "dineutronu" - stanu
związanego dwóch neutronów

- 2) Dwa sprzężone kanały

$$l = j \pm 1, s = 1, j$$

Tylko jeden przypadek: deuteron

$$l = 0 \quad (\text{dominuje})$$

$$l = 2 \quad (\text{"domilszka"})$$

$$s = 1, j = 1, t = m_t = 0$$

$$\langle p(01) 11; 00 | \Psi \rangle \equiv \Psi_0(p)$$

$$\langle p(21) 11; 00 | \Psi \rangle \equiv \Psi_2(p)$$

To są tzw. składowe S i D
w deuteronie

Mamy problem własny

$$H \psi = E_d \psi$$

Po dyskretyzacji (wyborze punktów p_i i wag do całkowania w_i)

$$\mathcal{V} = \left(\begin{array}{c} \psi_0(p_1) \\ \psi_0(p_2) \\ \vdots \\ \psi_0(p_N) \\ \psi_2(p_1) \\ \psi_2(p_2) \\ \vdots \\ \psi_2(p_N) \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \psi_0(p_1) \\ \psi_0(p_2) \\ \vdots \\ \psi_0(p_N) \\ \psi_2(p_1) \\ \psi_2(p_2) \\ \vdots \\ \psi_2(p_N) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2N \\ \text{składowych} \end{array}$$

$$\underbrace{\langle p_i | \hat{H} | \psi \rangle}_{\mathcal{H}_{ij}} = E_d \langle p_i | \psi \rangle$$

$$\sum_{l=0,2} \sum_{k=1,N} \langle p_i | \hat{V} | p_k \rangle \tilde{w}_k p_k^2 \langle p_k | \psi \rangle + \frac{p_i^2}{2\mu} \langle p_i | \psi \rangle$$

Dlatego elementy macierzy \mathcal{H} liczymy tak

$$\mathcal{H}_{i+\frac{l}{2}N, k+\frac{l'}{2}N} = \delta_{ik} \delta_{ll'} \frac{p_i^2}{2\mu}$$

$$+ \tilde{w}_k p_k^2 \langle p_i(l) 1; \infty | \hat{V} | p_k(l') 1; \infty \rangle,$$

$$i, k = 1, 2, \dots, N$$

$$l, l' = 0, 2$$

$$2\mu \approx \frac{1}{2} (M_p + M_n)$$

wektor własny ma wartość
już naprawdę niewielki: $2N \approx 100$
Aby obliczyć funkcję falową deuteronu
musimy znać elementy macierowe
 $\langle p'(L+1)1; \infty | \hat{V} | p(L+1)1; 00 \rangle$.

Jak te elementy macierowe obliczyć,
mając dany potencjał zapisany
w postaci $\langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle$, pokazę
na kolejnym wykładzie.

Jest to problem tzw. rozkładu na fale
parcjalne (po angielsku partial wave
decomposition), czyli znalezienia
elementów macierowych operatora
w odpowiedniej bazie.

Składowe $\psi_0(p)$ i $\psi_2(p)$ określają wszystkie własności deuteronu. W szeregu można możemy ich użyć do policzenia wartości oczekiwanych energii kinetycznej i energii potencjalnej w deuteronie

$$\text{Liczymy } \langle \psi_{md} | \hat{H}_0 | \psi_{md} \rangle$$

i $\langle \psi_{md} | \hat{V} | \psi_{md} \rangle$ dla $m_d = -1$, $m_d = 0$, lub $m_d = 1$ (wynik nie może zależeć od m_d !)

$$\langle \psi_{md} | \hat{H}_0 | \psi_{md} \rangle =$$

$$= \int d^3p p^2 \sum_{l=0,2} \int d^3p' p'^2 \sum_{l'=0,2}$$

$$\langle \psi_{md} | p^l \rangle \langle p^l | \hat{H}_0 | p'^{l'} \rangle \langle p'^{l'} | \psi_{md} \rangle,$$

$$\text{gdzie } |p^l\rangle \equiv |p(l,1) j_{md}; 00\rangle$$

$$\langle p^l | \hat{H}_0 | p'^{l'} \rangle = \delta_{ll'} \frac{\delta(p-p')}{p^2} \frac{p^2}{2\mu},$$

$$\langle p^l | \psi_{md} \rangle \equiv \psi_l(p)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{md} | \hat{H}_0 | \psi_{md} \rangle &= \int d^3p p^2 \sum_{l=0,2} \psi_l(p) \frac{p^2}{2\mu} \psi_l(p) = \\ &= \frac{1}{2\mu} \sum_{l=0,2} \int d^3p p^4 (\psi_l(p))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \Psi_{\text{mol}} | \hat{V}_0 | \Psi_{\text{mol}} \rangle = \\
& = \int dpp^2 \sum_{l=0,2}^1 \int dp' p'^2 \sum_{l'=0,2}^1 \\
& \langle \Psi_{\text{mol}} | p^l \rangle \langle p^l | \hat{V}_0 | p'^{l'} \rangle \langle p'^{l'} | \Psi_{\text{mol}} \rangle = \\
& = \sum_{l=0,2}^1 \sum_{l'=0,2}^1 \int dpp^2 \int dp' p'^2 \\
& \quad \Psi_l(p) \langle p^l | \hat{V}_0 | p'^{l'} \rangle \Psi_{l'}(p')
\end{aligned}$$