Na wykładzie VII mówiliśmy o bazie fal cząstkowych do opisu układu dwóch nukleonów (2N)

$$|p\alpha_2\rangle \equiv |p(ls)jm_j;tm_t\rangle$$

Jeśli znamy elementy macierzowe potencjału (właściwie energii pot.)

$\langle p'\alpha_2'|\hat{V}|p\alpha_2\rangle$, to możemy sprowadzić problem stanu związanego neutron-proton (deuteronu) do prostego problemu własnego.

Skąd wziąć $\langle p'\alpha_2'|\hat{V}|p\alpha_2\rangle$?

1) proste modele teoretyczne (tzw. toy models) dają bezpośrednio $\langle p'\alpha_2'|\hat{V}|p\alpha_2\rangle$. Przykładem jest separowalny potencjał Yamaguchi'ego w postaci

$$\langle p\,{}^3S_1|\hat{V}|p'\,{}^3S_1\rangle = \frac{\lambda}{(p^2+\beta^2)(p'^2+\beta^2)}$$

$$\langle p\,{}^3S_1|\hat{V}|p'\,{}^3D_1\rangle =$$

$$= \langle p\,{}^3D_1|\hat{V}|p'\,{}^3S_1\rangle =$$

$$= \langle p\,{}^3D_1|\hat{V}|p'\,{}^3D_1\rangle = 0 \quad , \quad \lambda < 0$$

Dla tego modelu funkcja falowa deuteronu $\langle p\, {}^3S_1 | \Psi \rangle$ oraz energia wiązania deuteronu dane są analitycznie!

deuteron-Yamaguchi-notes.pdf

deuteron-Yamaguchi.nb

2) Niekiedy potencjał przygotowany jest w bazie fal cząstkowych, ale w przestrzeni położeniowej!

$$\langle \vec{x} | \underbrace{r\, l\, m}_{\text{to też są funkcje własne kwadratu orbitalnego momentu pędu i składowej z orbitalnego momentu pędu}} \rangle = \frac{\delta(|\vec{x}| - r)}{r^2} Y_{lm}(\hat{x})$$

Aby znaleźć $\langle p \alpha_2 | \hat{V} | p' \alpha_2' \rangle$, niezbędne są iloczyny skalarne $\langle p\, l' m' | r\, l\, m \rangle$. Punktem wyjścia do ich obliczenia jest rozkład fali płaskiej na fale parcjalne

$$e^{i \vec{q} \cdot \vec{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{x}) Y_{lm}^{*}(\hat{q})\, i^l \underbrace{j_l(|\vec{q}||\vec{x}|)}_{\text{regularna w zerze sferyczna funkcja Bessela}}$$

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$$

$$j_2(z) = \frac{(3-z^2)\sin z}{z^3} - \frac{3\cos z}{z^2}$$

$$j_3(z) = \frac{(z^2-15)\cos z}{z^3} - \frac{3(2z^2-5)\sin z}{z^4}$$

$$\langle p\, l' m' | r\, l m\rangle = \int d\vec{p}\,' \int d\vec{x}\, \langle p\, l' m' | \vec{p}\,'\rangle$$

$$\langle \vec{p}\,' | \vec{x}\rangle \langle \vec{x} | r\, l m\rangle =$$

$$= \int d\vec{p}\,' \int d\vec{x}\, \frac{\delta(p-p')}{p^2} Y^*_{l'm'}(\hat{p}') \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}} \frac{\delta(x-r)}{r^2} Y_{lm}(\hat{x}) =$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{L,M} \int d\hat{p}' \int d\hat{x}\, Y^*_{l'm'}(\hat{p}')$$

$$Y_{lm}(\hat{x})\, Y^*_{LM}(\hat{x})\, Y_{LM}(\hat{p}')\, (i^L)^* j_L(pr)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{L,M} (-1)^L i^L j_L(pr)$$

$$\int d\hat{p}'\, Y^*_{l'm'}(\hat{p}')\, Y_{LM}(\hat{p}')$$

$$\int d\hat{x}\, Y^*_{LM}(\hat{x})\, Y_{lm}(\hat{x})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{L,M} (-1)^L i^L j_L(pr)\, \delta_{Ll'}\delta_{Mm'}$$

$$\delta_{Ll}\delta_{Mm}$$

$$\langle p l' m' | r l m \rangle =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^l i^l j_l(pr) \delta_{l l'} \delta_{m m'}$$

W takim razie

$$\langle p' l' m' | \hat{V} | p l m \rangle = \sum_{L,M} \sum_{L',M'} \int dr\, r^2 \int dr'\, r'^2 \langle p' l' m' | r' L' M' \rangle \langle r' L' M' | \hat{V} | r L M \rangle \langle r L M | p l m \rangle =$$

$$= \sum_{L,M} \sum_{L',M'} \int dr\, r^2 \int dr'\, r'^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{l'} i^{l'} j_{l'}(p'r') \delta_{l'L'} \delta_{m'M'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^l i^l (-1)^l j_l(pr) \delta_{lL} \delta_{mM} \underbrace{\langle r' L' M' | \hat{V} | r L M \rangle}_{\frac{\delta(r-r')}{r^2} V_{L'L}(r)}$$

$$\frac{\delta(r-r')}{r^2} V_{L'L}(r) \longleftarrow \text{potencjał lokalny!}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int dr\, r^2 j_{l'}(p'r) j_l(pr) V_{l'l}(r)\, i^{l+l'} (-1)^{l'}$$

Ze względu na zachowanie parzystości $l' = l$ lub $l' = l \pm 2$

$$\langle p'l'm' | \hat{V} | p l m \rangle =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int dr\, r^2 j_l(p'r) j_l(pr) V_{ll}(r), & l = l' \\ -\frac{2}{\pi} \int dr\, r^2 j_{l'}(p'r) j_l(pr) V_{l'l}(r), & l' = l \pm 2 \end{cases}$$

Dlaczego w tym punkcie skupialiśmy się na stanach $|r l m\rangle$ i nic nie mówiliśmy o spinie i izospinie? Powód jest b. prosty: stany spinowe i izospinowe mają tę samą postać w przestrzeni położeniowej i pędowej

$$|(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}) s m_s\rangle = \sum_{m_1, m_2} c(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} s; m_1, m_2, m_s) |\tfrac{1}{2} m_1\rangle |\tfrac{1}{2} m_2\rangle$$

$$|(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}) t m_t\rangle = \sum_{\nu_1, \nu_2} c(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} t; \nu_1, \nu_2, m_t) |\tfrac{1}{2} \nu_1\rangle |\tfrac{1}{2} \nu_2\rangle$$

$$|r (l s) j m_j; t m_t\rangle =$$

$$= \sum_{m_l, m_s} c(l s j; m_l, m_s, m_j) |r l m_l\rangle |s m_s\rangle |t m_t\rangle$$

Przypadek 2) zachodzi na przykład dla szeroko używanego potencjału Argonne V18 – autorzy udostępnili program do liczenia elementów macierzowych $V_{l'l}^{sjt}(r)$:

Phys. Rev. C 51, 38 (1995)

3) Potencjały przygotowane w przestrzeni pędowej w formie $\langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p} \rangle$. Są to elementy macierzowe w przestrzeni pędowej, ale operatory w przestrzeni spinowej i izospinowej 2N (bo zależą od $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_1$ i $\vec{\tau}_2$)

Dzisiejszy wykład służy przygotowaniu rachunku prowadzącego od $\langle \vec{p}' | \hat{V} | \vec{p} \rangle$ do $\langle p' \alpha_2' | \hat{V} | p \alpha_2 \rangle$

G.R. Satchler, D. M. Brink
Angular Momentum
Oxford University Press, Incorporated, 1994

M.E. Rose
Elementary Theory of Angular Momentum
Dover Publications, Incorporated, 2011

A.R. Edmonds
Angular Momentum in Quantum Mechanics
Princeton University Press, 1996

A. Bohr. B.R. Mottelson
Struktura Jądra Atomowego
Tom 1: Ruch Jednocząstkowy
PWN, Warszawa, 1975

W. Glöckle
The Quantum Mechanical Few-Body Problem
Springer Verlag, 1983

Orbitalny moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ w mechanice kwantowej

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

We współrzędnych sferycznych $(r = |\vec{r}|)$

$$\vec{r} = r (\sin\Theta \cos\varphi, \sin\Theta \sin\varphi, \cos\Theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= -\underbrace{r \sin\Theta \sin\varphi}_{y} \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{r \sin\Theta \cos\varphi}_{x} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{\hat{L}_z}{-i\hbar} \Rightarrow \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left[\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]}_{-\frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2}}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2}$$

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = i\hbar\, \varepsilon_{kmn} \hat{L}_k$$

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0, \quad \hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y$$

Funkcje kuliste (harmoniki sferyczne) są funkcjami własnymi $\vec{L}^2$ i L_z w reprezentacji położeniowej.

Aby je zbudować potrzebujemy wielomianów Legendre'a

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

...

tworzących bazę ortogonalną funkcji na przedziale $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x^{l-2k}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}^2 (x-1)^{l-k} (x+1)^k$$

Jeśli funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $[-1, 1]$, to zachodzi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$$

$$f(x) P_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) P_l(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, P_k(x) P_l(x)}_{\frac{2}{2l+1} \delta_{kl}}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_l(x) = a_l \frac{2}{2l+1}$$

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\, dx$$

Stowarzyszone wielomiany Legendre'a
(Stowarzyszone funkcje Legendre'a)

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

$m = 0, 1, 2, \dots, l$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

Uwaga na konwencje dotyczące znaków $P_l^m(x)$! Ja używam tych samych, co w Wolfram MathWorld, bo prowadzą do poprawnych harmonik sferycznych!

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_l^{m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mm'}$$

$m \neq 0$

Harmoniki sferyczne (funkcje kuliste)

$$Y_l^m(\Theta,\varphi) \equiv Y_{lm}(\Theta,\varphi) =$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\Theta)\, e^{im\varphi}$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

$$m = -l, -l+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, l$$

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\Theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\, Y_{lm}(\Theta,\varphi)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\Theta,\varphi) = \hbar m\, Y_{lm}(\Theta,\varphi)$$

$$Y_{00}(\Theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10}(\Theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\Theta$$

$$Y_{1,\pm}(\Theta,\varphi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\Theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20}(\Theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos^2\Theta - 1\right)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\Theta,\varphi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\Theta\cos\Theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\Theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\Theta\, e^{\pm 2i\varphi}$$

Najważniejsze własności harmonik sf.

(*) $$\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta \sin\Theta \, Y_{lm}(\Theta,\varphi)\, Y^{*}_{l'm'}(\Theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

(ortogonalność i normalizacja)

(*) $$f(\Theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_{lm}(\Theta,\varphi)$$

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta \sin\Theta \, Y^{*}_{lm}(\Theta,\varphi) f(\Theta,\varphi)$$

(zupełność)

(*) $$Y_{lm}(\Theta,\varphi)\, Y_{l'm'}(\Theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}} \sum_{L,M} c(l\,l'\,L;000)\, c(l\,l'\,L; m, m', M) \frac{Y_{LM}(\Theta,\varphi)}{\sqrt{2L+1}}$$

(iloczyn dwóch harmonik o tych samych argumentach)

(*) $$\left(Y_{lm}(\Theta,\varphi)\right)^{*} = (-1)^{m} Y_{l,-m}(\Theta,\varphi)$$

(*) Harmoniki sferyczne stanowią bazę nieredukowalnej reprezentacji w przestrzeni funkcji

z jednej strony mamy

$$Y'_{lm}(\hat{r}) = Y_{lm}(R^{-1}\hat{r})$$

z drugiej strony

$$Y'_{lm}(\hat{r}) = \underbrace{\sum_{m'} D^{l}_{m'm}(R)\, Y_{lm'}(\hat{r})}$$

kombinacja liniowa funkcji kulistych z danym l (wewnątrz reprezentacji nieredukowalnej l)

$$(*)\quad \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\Theta,\varphi)\,Y^*_{lm}(\Theta',\varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\psi)$$

$$\cos\psi = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$(*)\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta \sin\Theta\, Y_{lm}(\Theta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\Theta,\varphi)\,Y_{l''m''}(\Theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix},$$

gdzie $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix}$ jest symbolem 3j-Wignera, który można wyrazić z pomocą współczynników Clebscha-Gordana

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{l_1-l_2-M} \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\, C(l_1 l_2 l; m_1, m_2, -M)$$

Notacja

$$Y_{lm}(\Theta,\varphi) \equiv Y_{lm}(\hat{r}), \text{ gdzie}$$

$$\hat{r} \equiv (\sin\Theta\cos\varphi, \sin\Theta\sin\varphi, \cos\Theta)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta \sin\Theta \equiv \int d\hat{r}$$

$$(*)\; Y_{lm}(-\hat{r}) = Y_{lm}(\pi-\Theta, \varphi+\pi) = (-1)^l Y_{lm}(\Theta,\varphi)$$

odbicie

parzystość harmoniki sferycznej

(*)

Związek ze składowymi sferycznymi wektora

$$(\vec{a})_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y)$$

$$(\vec{a})_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y)$$

$$(\vec{a})_0 = a_z$$

$$(\vec{a})_\tau = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, |\vec{a}|\, Y_{1\tau}(\hat{a})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{3}\sum_{m_1,m_2} c(1\,1\,0; m_1, m_2, 0)\,(\vec{a})_{m_1}(\vec{b})_{m_2} \equiv$$

$$\equiv -\sqrt{3}\,\{a_1 b_1\}^{00}$$

sprzężenie do momentu pędu zero

Składowe sferyczne iloczynu wektorowego

$$(\vec{c} \times \vec{d})_\tau = -i\sqrt{2}\,\{c_1 d_1\}^{1\tau} \equiv$$

$$\equiv -i\sqrt{2} \sum_{m_1, m_2} c(111; m_1, m_2, \tau)\, (\vec{c})_{m_1} (\vec{d})_{m_2}$$

Własności współczynników Clebscha-Gordana

$$c(j_1 j_2 j_3; m_1 m_2 m_3) = (-1)^{j_1+j_2-j_3}\, c(j_1 j_2 j_3; -m_1, -m_2, -m_3) =$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j_3}\, c(j_2 j_1 j_3; m_2 m_1 m_3)$$

$$= (-1)^{j_1-m_1} \left(\frac{2j_3+1}{2j_2+1}\right)^{\frac{1}{2}} c(j_1 j_3 j_2; m_1, -m_3, -m_2)$$

$$= (-1)^{j_1-m_1} \left(\frac{2j_3+1}{2j_2+1}\right)^{\frac{1}{2}} c(j_3 j_1 j_2; m_3, -m_1, m_2)$$

$$= (-1)^{j_2+m_2} \left(\frac{2j_3+1}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}} c(j_3 j_2 j_1; -m_3, m_2, -m_1)$$

$$= (-1)^{j_2+m_2} \left(\frac{2j_3+1}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}} c(j_2 j_3 j_1; -m_2, m_3, m_1)$$

$$c(j\,0\,j; m\,0\,m) = 1$$

$c(j_1 j_2 j_3; 000)$ znika dla j_1, j_2, j_3 całkowitych, jeśli $j_1+j_2+j_3$ nie jest liczbą parzystą!

Sprzęganie trzech momentów pędu

I sposób

Najpierw $j_1, j_2 \to J_{12}$

Potem $J_{12}, j_3 \to J$

II sposób

Najpierw $j_2, j_3 \to J_{23}$

Potem $j_1, J_{23} \to J$

$$|(j_1 j_2) J_{12}\, j_3 ; JM\rangle = \sum_{J_{23}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)}\,(-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix} |j_1 (j_2 j_3) J_{23} ; JM\rangle$$

$$|j_1 (j_2 j_3) J_{23} ; JM\rangle = \sum_{J_{12}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)}\,(-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix} |(j_1 j_2) J_{12}\, j_3 ; JM\rangle$$

$\hat{a} \equiv 2a+1$ dla liczb całkowitych i połówkowych

$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix}$ symbol 6j

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+l_1+l_2} W(j_1 j_2 l_2 l_1; j_3 l_3)$$

symbol Racah

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+J_{12}} \frac{1}{\sqrt{\hat{j}_3 \hat{J}}}$$

Sprzęganie czterech momentów pędu

I sposób

$j_1, j_2 \to J_{12}$ $J_{12}, J_{34} \to J$

$j_3, j_4 \to J_{34}$

II sposób

$j_1, j_3 \to J_{13}$ $J_{13}, J_{24} \to J$

$j_2, j_4 \to J_{24}$

$$|(j_1 j_2) J_{12} (j_3 j_4) J_{34}; JM\rangle = \sum_{J_{13}, J_{24}} \sqrt{\hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \hat{J}_{13} \hat{J}_{24}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} |(j_1 j_3) J_{13} (j_2 j_4) J_{24}; JM\rangle$$

$$|(j_1 j_3)J_{13}(j_2 j_4)J_{24};JM\rangle =$$

$$= \sum_{J_{12},J_{34}} \sqrt{\hat{J}_{12}\hat{J}_{34}\hat{J}_{13}\hat{J}_{24}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}$$

$$|(j_1 j_2)J_{12}(j_3 j_4)J_{34};JM\rangle$$

symbol 9j

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_2+j_3+J_{12}+J_{13}}}{\sqrt{\hat{J}_{12}\hat{J}_{13}}}$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{13} \end{Bmatrix} \delta_{J_{12}J_{34}} \delta_{J_{13}J_{24}}$$

$$\mathcal{Y}^{LM}_{l_1 l_2}(\hat{a}\hat{b}) \equiv \sum_{m_1,m_2} c(l_1 l_2 L; m_1, m_2, M)$$

$$Y_{l_1 m_1}(\hat{a}) Y_{l_2 m_2}(\hat{b}) \equiv$$

$$\{Y_{l_1}(\hat{a}) Y_{l_2}(\hat{b})\}^{LM}$$

Dalsze własności iloczynów współczynników Clebscha-Gordana

$$c(a\,b\,e;\alpha,\beta,\alpha+\beta)\,c(e\,d\,c;\alpha+\beta,\delta,\alpha+\beta+\delta)$$
$$=\sum_f \sqrt{\hat{e}\,\hat{f}}\;W(a,b,c,d;e,f)$$
$$c(b\,d\,f;\beta,\delta,\beta+\delta)\,c(a\,f\,c;\alpha,\beta+\delta,\alpha+\beta+\delta)$$

Zapis rozwinięcia funkcji skalarnej w szereg wielomianów Legendre'a

$$f(\vec{a},\vec{b})=f\left(|\vec{a}|,|\vec{b}|,x=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

$$f(\vec{a},\vec{b})=\sum_r 2\pi\sqrt{2r+1}\,(-1)^r g_r\, Y^{00}_{rr}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

$$g_r\equiv\int_{-1}^{1}dx\,P_k(x)\,f(|\vec{a}|,|\vec{b}|,x)$$

$$x \Leftrightarrow \cos\sphericalangle\{\vec{a},\vec{b}\}$$

Ta forma rozwinięcia jest wykorzystywana we wzorze

$$Y^{LM}_{l_1 l_2}(\hat{a}\,\hat{b})\,Y^{00}_{kk}(\hat{a},\hat{b})=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\hat{k}\,\hat{l}_1\,\hat{l}_2}$$
$$(-1)^{l_1+l_2+L}\sum_{f_1,f_2}\begin{Bmatrix} f_2 & f_1 & L\\ l_1 & l_2 & k\end{Bmatrix} c(k\,l_1\,f_1;000)$$
$$c(k\,l_2\,f_2;000)\,Y^{LM}_{f_1 f_2}(\hat{a}\,\hat{b})$$

$$Y_{lm}(\widehat{\vec a+\vec b}) = \sum_{l_1+l_2=l}' \frac{|\vec a|^{l_1}\,|\vec b|^{l_2}}{|\vec a+\vec b|^{l}} \sqrt{\frac{4\pi\,(2l+1)!}{(2l_1+1)!\,(2l_2+1)!}}\; \mathcal{Y}^{lm}_{l_1 l_2}(\hat a\,\hat b) \qquad (\boxed{\equiv})$$

$$\mathcal{Y}^{lm}_{l_1 l_2}(\hat a\,\hat b) \equiv \sum_{m_1}' C(l_1 l_2 l;\, m_1, m-m_1, m)\; Y_{l_1 m_1}(\hat a)\, Y_{l_2\, m-m_2}(\hat b)$$

$$\hat a \equiv \frac{\vec a}{|\vec a|}\,, \quad \hat b \equiv \frac{\vec b}{|\vec b|}$$

$$e^{i\vec q\cdot\vec r} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l}{}' Y_{lm}(\hat r)\, Y^{*}_{lm}(\hat q)\, i^{l}\, j_l(|\vec q|\,|\vec r|)$$

regularna w zerze sferyczna funkcja Bessela

Wykorzystując powyższy wzór, zapisując $e^{i\vec r\cdot(\vec a+\vec b)} = e^{i\vec r\cdot\vec a}\, e^{i\vec r\cdot\vec b}$, i przechodząc do granicy $(|\vec a|\to 0,\ |\vec b|\to 0)$, można udowodnić $(\boxed{\equiv})$

$c(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0)$ jest równy zero, jeśli $j_1 + j_2 + j_3$ nie jest liczbą parzystą

$$c(r\, r\, 0; 0\,0\,0) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{2r+1}}$$

$$c(j\, 0\, j; m, 0, m) = c(0\, j\, j; 0\, m\, m) = 1$$

$$\left(Y_{00}(\hat{a})\right)^* = Y_{00}(\hat{a}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\left(y^{00}_{ll}(\vec{a}\,\vec{b})\right)^* = y^{00}_{ll}(\vec{a}\,\vec{b})$$

---

z jednej strony mamy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \qquad (1)$$

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx$$

Z drugiej strony $\left(f(\vec{a}, \vec{b}) \equiv f(|\vec{a}|, |\vec{b}|, \hat{a} \cdot \hat{b}) \right)$

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{2k+1} (-1)^k g_k \mathcal{Y}^{00}_{kk}(\hat{a}\, \hat{b}),$$

$$g_k = \int_{-1}^{1} f(|\vec{a}|, |\vec{b}|, x) P_k(x)\, dx \qquad (2)$$

Dodatkowo zachodzi

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{a}) Y^{*}_{lm}(\hat{b}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{a} \cdot \hat{b}) \qquad (3)$$

Sprawdzenie zgodności (1) i (2)

$$\mathcal{Y}^{00}_{kk}(\hat{a}\, \hat{b}) = \sum_{m=-k}^{k} c(kk0; m, -m, 0)$$

$$Y_{km}(\hat{a}) Y_{k,-m}(\hat{b}) =$$

$$= \sum_{m=-k}^{k} \frac{(-1)^{k+m}}{\sqrt{2k+1}} Y_{km}(\hat{a}) (-1)^m Y^{*}_{km}(\hat{b})$$

$$(-1)^{2m} = 1$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}} \sum_{m=-k}^{k} Y_{km}(\vec{a}) Y^*_{km}(\vec{b}) =$$

$$= \frac{2k+1}{\sqrt{2k+1}} (-1)^k \frac{1}{4\pi} P_k(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$$

$$= \sqrt{2k+1} \frac{1}{4\pi} (-1)^k P_k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{2k+1} (-1)^k g_k \sqrt{2k+1} \frac{1}{4\pi} (-1)^k P_k(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(2k+1) g_k}_{a_k} P_k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sum_{k=0} a_k P_k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(|\vec{a}|, |\vec{b}|, x) P_k(x) dx ,$$

więc mamy zgodność z (1)

Wykorzystaliśmy

$$c(k, k, 0; m, -m, 0) = \frac{(-1)^{k+m}}{\sqrt{2k+1}}$$

oraz $Y_{k,-m}(\vec{b}) = (-1)^m Y^*_{km}(\vec{b})$