

wykład 11 WZFT

"Skok" do teorii pola

w jednym (!) wykładzie jestem  
w stanie podać tylko podstawowe  
informacje o przejściu od funkcji  
falowych do (oddziaływających) pól.

Dlaczego potrzebujemy teorii pola?

Nie możemy pracować z funkcjami  
falowymi, jeśli chcemy opisać procesy,  
gdzie cząstki są tworzone lub znikają!  
Pojęcie pola jest używane na przykład  
w klasycznej elektrodynamice.

Aby jakos przybliżyć pojęcie pola,  
możemy sobie wyobrazić, że trójwymiarowa  
przestrzeń jest podzielona na bardzo  
małe "pudełka". Dalej w każdym  
pudełku znajduje się fikcyjna cząstka,  
a wychylenie tej cząstki z położenia  
równowagi będzie wartością pola  
w tym punkcie, gdzie znajduje się  
pudełko. Jeśli pole spełnia jakies  
równanie falowe, to ruchy poszczególnych  
"cząstek" wpływają na ruch sąsiadów.

Możemy wybierać sobie układ  
małych sprzężonych oscylatorów  
harmonicznych.

w takim razie możemy wprowadzić  
metody i reguły mechaniki kwantowej  
i skwantować ruch bardzo (niekoniecznie)  
wielu oscylatorów. Osiągamy to przez  
nabranie reguł komutacji

$[x_k, p_k] = i$ , gdzie  $x_k$  i  $p_k$  są  
położeniem i pędem  $k$ -tego oscylatora.

Cząstki (nie te fikcyjne, ale te, które  
chcemy opisać) pojawiają się jako kwanty  
pola, a odpowiednia teoria może  
opisać układ z dowolną liczbą cząstek.

Osoby, które nie pamiętają, jak wygląda  
opis jednowymiarowego oscylatora  
harmonicznego w mechanice  
kwantowej, proszone są o zapoznanie  
się z odpowiednim rozdziałem dowolnego  
podręcznika do mechaniki kwantowej  
lub przynajmniej o przeczytanie moich  
skróconych notatek na ten temat.

Aby otrzymać równanie pola, korzystamy z formalizmu Lagrange'a.

Dla układu oscylatorów zapisujemy działanie  $S$

$$S = \int dt \sum_{r=1}^{N^3} L(x_r, \dot{x}_r)$$

$$S = \int dt \sum_{r=1}^{N^3} \left( \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 - \frac{1}{2} m \omega_r^2 x_r^2 \right)$$

Porozważając niezależne wariacje  $x_r$ , otrzymujemy  $N^3$  równań Lagrange'a -

-Eulera: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_r}$$

Mamy następujące odpowiedniki

układ oscylatorów  $x_r$  — pole  $\phi(x)$

numerowanie za pomocą indeksu  $r$  — wskazanie położenia  $\vec{x}$

$\sum_{r=1}^{N^3} \Delta V_r$  —  $\int d^3\vec{x}$   
objętość  $r$ -tej komórki

Działanie pola  $S$

$$S = \int dt \left[ \underbrace{d^3\vec{x} L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}_{\text{gęstość lagrangianu}} \right]_{\text{lagrangian}}$$

Rozważamy infinitesimalną wariację działania

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]$$

Drugi składnik w powyższym wzorze całkowujemy "przez części" ( $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$ ), zakładając odpowiednio warunki brzegowe pozwalające zaniedbać wkład od "pochodnej iloczynu". Daje to

$$\delta S = - \int d^4x \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right] \delta \phi(x)$$

Zakładając stacjonarne działanie:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

Jeśli w Lagrangianie występuje więcej nieliniowych pól, musimy dla nich w odpowiednich zapisach równania Lagrange'a - Eulera.

Ważne: gęstość Lagrangianu jest lorentzowskim skalarem (STW).  
Dla danej teorii (QED, QCD, ...) decyduje o jej własnościach!

Aby móc zajmować się teorią  
cząstek oddziaływujących, musimy  
najpierw poznać przykłady  
dla pól swobodnych (nieoddziaływujących)

\* rzeczywiste pole Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

\* zespolone pole Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

\* Pole elektromagnetyczne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$(F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

\* Pole Diraca

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi$$

$$\text{lub } \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \left[ (-i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi) \right. \\ \left. + \bar{\Psi} (\gamma^\mu i \partial_\mu - m) \Psi \right]$$

Pytanie: dlaczego  $\mathcal{L}_1$  i  $\mathcal{L}_2$  są  
równoważne?

\* Pole Proca (pole masywnego bozonu o spinie 1)

\* Pole Rarity-Schwingera

(pole fermionu masywnego o spinie  $\frac{3}{2}$ )

# Przeznawiste pole Kleina-Gordona

Najprostsze - jedno nielocalne pole

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - m^2 \varphi^2 \right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right)$$

ogólne równanie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu})} \right)$$

Aby się nie pomylić w rachunkach, bezpieczniej jest zastosować następujący zapis

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi) (\partial_\beta \varphi) - m^2 \varphi^2 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \varphi + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \delta_\beta^\mu$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \partial_\beta \varphi + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi = \partial^\mu \varphi$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \varphi = \square \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} m^2 2\varphi = -m^2 \varphi$$

Równanie Lagrange'a - Eulera

$$\square \varphi = -m^2 \varphi$$

$$(\square + m^2) \varphi = 0 \quad (1)$$

Pęd kanonicznie sprzężony

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\varphi})} = \partial_0 \varphi = \dot{\varphi}$$

W procedurze kanonicznego kwantowania

$\pi$  i  $\varphi$  stają się operatorami

hermitowskimi spełniającymi

relacje komutacji dla ustalonej chwili czasu

$$[\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}')] = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0$$

$$[\pi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}')] = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2)$$

Dalej wykorzystujemy fakt, że

dowolne rozwiązanie równania (1)

możemy napisać jako rozwinięcie

na fale płaskie

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left( a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_k t} \right)$$

$$\omega_k \equiv \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$



W klasycznej teorii pola  $\varphi$   
 $a^+(\vec{k})$  jest zespolonym sprzężeniem  
 amplitudy  $a(\vec{k})$ . W kwantowej  
 teorii pola  $a^+(\vec{k})$  jest operatorem  
 sprzężonym po hermitowsku do  
 operatora  $a(\vec{k})$ .

Przy wybranym rozwinięciu  $\varphi$   
 i regułach komutacji (2) zachodzi

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = 0$$

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

To przypomina kwantowanie oscylatora  
 harmonicznego!

Częstość hamiltonianu

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \left( \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \pi(t, \vec{x})^2 + |\nabla \varphi(t, \vec{x})|^2 + m^2 \varphi(t, \vec{x})^2 \right]$$

Można pokazać, że sam hamiltonian  $H$ ,

$$H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}(\pi, \varphi),$$

można zapisać

w postaci

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} \omega_k \left[ a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^+(\vec{k}) \right],$$

to oznacza, że hamiltonian jest  
ciągłą sumą składników postaci

$$H_{\vec{k}} = \frac{\omega_k}{2} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})]$$

Każdy taki składnik jest  
hamiltonianem oscylatora harmonic-  
nego prostego z częstotliwością  $\omega_k$ .

To można jeszcze lepiej zobaczyć,  
jeśli uświadnimy normalizację

$$\int d^3\vec{k} \rightarrow \sum_{\vec{k}} \Delta V_k$$

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \rightarrow \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{\Delta V_k}$$

( $\Delta V_k$  jest objętością komórki  
w przestrzeni pędowej)

$$\text{wtedy } H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_k (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger)$$

$$a_{\vec{k}} = \sqrt{\Delta V_k} a(\vec{k})$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0$$

Dla każdego  $\vec{k}$  rozwiązanie dla oscylatora harmonicznego jest określone przez liczbę obsadzeń  $n_{\vec{k}}$ ,  $n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots$  a stany własne energii w tej dyskretnej pobudzie mają postać

$$H_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}}) = \omega_{\vec{k}} \left( n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}}),$$

$$\phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} \left( a_{\vec{k}}^{\dagger} \right)^{n_{\vec{k}}} \phi_{\vec{k}}(0)$$

Stan podstawowy  $\phi_{\vec{k}}(0)$  jest zdefiniowany warunkiem

$$a_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(0) = 0$$

a stany  $\phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}})$  są znormalizowane

$$(\phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}}), \phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}}')) = \delta_{n_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}'}$$

Stany własne ciągłej energii są iloczynami  $\phi_{\vec{k}}$  dla poszczególnych komórek podowych i są charakteryzowane wspólną wartością  $n_{\vec{k}}$  dla poszczególnych  $\vec{k}$ .

$$\phi(n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_d}, \dots) = \prod_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(n_{\vec{k}})$$

Pełny stan podstawowy (stan próżni)

$$\phi_0 = \prod_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(0)$$

Energia próżni jest nieskończona!

Można ją pominać w wielu zagadnieniach, gdzie wariana jest różnica energii.

Stoczn normalny

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} + \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} a^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)}$$

$$\equiv \underbrace{\varphi^{(+)}(x)}_{\text{dodatnie}} + \underbrace{\varphi^{(-)}(x)}_{\text{ujemne}}$$

częstości                      częstości

Uporządkowanie normalne iloczynów pól

$$: \varphi \varphi : = \varphi^{(-)} \varphi^{(-)} + 2\varphi^{(-)} \varphi^{(+)} + \varphi^{(+)} \varphi^{(+)}$$

(części z dodatnimi częstościami zawsze "na prawo")

Co to daje?

Nie mamy  $a_k \phi_k(0) = 0$  i równania sprzężonego po hermitowsku, próżniowa wartość oczekiwana znika, jeśli czynniki występują w porządku normalnym.

Symetria stanów

Dowolny stan jest superpozycją stanów z określoną całkowitą energią

$$\phi(\dots, n_k, \dots) = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^+)^{n_k} \phi_k(0)$$

Takie stany opisane są całkowicie przez liczbę kwantów  $n_k$  dla każdego  $k$ . Poszczególne kwanty są niezależne, bo wszystkie  $a_k^+$  komutują ze sobą, a kolejność operatorów  $a_k^+$  nie jest istotna. Znajduje to odzwierciedlenie w własności dowolnego stanu  $\Phi$  zapisanego w notacji ciągłej

$$\Phi = \left[ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \dots d^3 k_n c_n(k_1, k_2, \dots, k_n) a^+(k_1) a^+(k_2) \dots a^+(k_n) \right] \phi_0$$

współczynniki  $C_n$  opisują rozkład pędów tej składowej ogólnego stanu  $\Phi$ , która zawiera  $n$  kwantów. Są one funkcjami falowymi w przestrzeni pędów reszty  $n$  identycznych cząstek o zadany wyborze pędów  $k_i$

$$C(\dots, k_i, \dots, k_j, \dots) = C(\dots, k_j, \dots, k_i, \dots)$$

Ten warunek symetrii wynika z reguł komutacji  $a^\dagger(k)$  i wskazuje, że kwanty wyprowadzone z kanonicznego kwantowania spełniają statystykę Bosego-Einsteina

BOSONY!

$$|0\rangle \equiv \phi_0$$

stan jednocząstkowy  $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$

stan dwucząstkowy  $a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')|0\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$$

stany powyższe są unormowane, jeśli  $\langle 0|0\rangle = 1$

Dodatkowe definicje

Komutator pól

$$i \Delta(x-y) \equiv [\varphi(x), \varphi(y)]$$

$$T(a(x)b(x')) = \begin{cases} a(x)b(x'), & \text{dla } t > t' \\ b(x')a(x), & \text{dla } t' > t \end{cases}$$

Ilozyn chronologiczny

(  $\Delta(\vec{x}-\vec{y}, 0) = 0$  ; równoczesny  
komutator dwóch amplitud pola  
jest równy zero )

Propagator Feynmana

$$i \Delta_F(x-y) = \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle$$
$$= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}$$

# Zespólone pole Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \dot{\cdot} (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi : \leftarrow$$

$\varphi, \varphi^*$  są traktowane jako <sup>ilościowy</sup> normalny nieliniowe pole. (jako nieliniowe pola można też traktować wszystkie rzeczywiste i urojone  $\varphi$ .)

Dostajemy

$$(\square + m^2) \varphi = 0, \quad (\square + m^2) \varphi^* = 0$$

$$\pi(x) = \dot{\varphi}^*$$

$$\pi^* = \dot{\varphi}$$

Rozwiązania na fale płaskie

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ikx})$$

$$\varphi^*(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} + b(\vec{k}) e^{-ikx})$$

$$kx = k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x} \equiv \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

Kanoniczne kwantowanie:

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] &= [\pi^*(\vec{x}, t), \varphi^*(\vec{x}', t)] = \\ &= -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

~~Porozbarte komutatory są równe zero.~~



Dostajemy

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

(Porozdzielone kombinacje dają zero.)

Więc możemy interpretować  $a(\vec{k})$  ( $a^\dagger(\vec{k})$ ) i  $b(\vec{k})$  ( $b^\dagger(\vec{k})$ ) jako operatory anihilacji (krecacji) dla dwóch rodzajów cząstek ( $a$  i  $b$ ).

Operatory liczby obsadzeń

$$N_a = a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})$$

$$N_b = b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})$$

Stan próżni  $|0\rangle$  spełnia

$$\forall \vec{k} \quad a(\vec{k})|0\rangle = b(\vec{k})|0\rangle = 0$$

Przyjmując iloczyn normalny, możemy napisać czteropęd pola

$$P^\alpha = \int d^3\vec{k} \, k^\alpha (N_a + N_b),$$

ciężkość ładunku pola

$$Q = q \int d^3\vec{k} (N_a - N_b) \quad (q \text{ jest ładunkiem cząstki } a)$$

## Propagator Feynmana

$$i \Delta_F(x-y) \equiv \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi^*(y)) | 0 \rangle$$

ma taką samą postać, jak dla rzeczywistego pola Kleina-Gordona

## Pole Diraca

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m \bar{\Psi} \Psi$$

$$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi$$

$$- \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) + \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi$$

$$= \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] =$$

$$= \partial_\mu \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \right]$$

$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$  jest czerodzywergencją, więc obie gęstości Lagrangiana są równie poprawne. Wybieramy  $\mathcal{L}_1$ .

Je mamy nierelatywistycznych pól? 8

$\psi_r$  - składowa  $\psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} = -m \bar{\psi}_r$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_r)} = i \sum_a^1 \bar{\psi}_a \gamma_a^\mu = i (\bar{\psi} \gamma^\mu)_r$$

Równanie Lagrange'a - Eulera dla  $\psi_r$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_r)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r}$$

$$\partial_\mu (i (\bar{\psi} \gamma^\mu)_r) = -m \bar{\psi}_r$$

$$(i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu)_r = -m \bar{\psi}_r \quad \text{dla składowej } r$$

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = -m \bar{\psi} \quad \text{dla całego } \bar{\psi}$$

Teraz dla  $\bar{\psi}_r$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_r)} = 0 \quad (\text{w } \mathcal{L}_1 \text{ nie ma pochodnych } \bar{\psi})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_r} = i \sum_b^1 \gamma_{rb}^\mu \partial_\mu \psi_b - m \psi_r$$

Równanie Lagrange'a - Eulera dla  $\bar{\psi}_r$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_r)} \right) = 0 = i \sum_b^1 \gamma_{rb}^\mu \partial_\mu \psi_b - m \psi_r$$

Dla całego wektora oznacza to

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi = 0$$

$$i \not{\partial} \psi - m \psi = 0$$

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0$$

Dla pola Diraca mamy więc to samo  
rownanie, co dla swobodnej czystki

Diraca. To samo rownanie  $\rightarrow$   
te same rozwiazania!

Podaj kanonicznie sprezione

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_r} = i \sum_a^{\dagger} \bar{\psi}_a \gamma_a^0 = i \psi_r^{\dagger}$$

$$\bar{\pi}_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_r} = 0$$

Gęstość hamiltonianu

$$\mathcal{H} = \sum_r^{\dagger} i \psi_r^{\dagger} \dot{\psi}_r - \mathcal{L} = i \psi^{\dagger} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L}$$

$$= i \psi^{\dagger} \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{\uparrow} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} -$$

$$- i \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + m \bar{\psi} \psi - i \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi$$

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger (m\gamma^0 - i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) \psi$$

$i \frac{\partial \psi}{\partial t}$  from the Dirac equation

$$\mathcal{H} = i\psi^\dagger + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Dla fermionów operator liczby cząstek musi mieć wartości własne 0 albo 1, bo w danym stanie może być tylko jedna cząstka. Trzeba zmienić relacje komutacji, bo te wprowadzone wcześniej były dobre dla bozonów!

Antykomutator  $\{A, B\} = AB + BA$

Wprowadzimy  $\{a, a^\dagger\} = 1$ ,  $\{a, a\} = 0$ ,  $\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$  i sprawdzimy wartości własne  $N \equiv a^\dagger a$

$N|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  problem własny

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a =$$

$$= a^\dagger a - a^\dagger a^\dagger a a = a^\dagger a = N$$

$$(a a = \frac{1}{2} \{a, a\} = 0)$$

$$N^2 |\alpha\rangle = \alpha^2 |\alpha\rangle = N |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

$$\alpha^2 = \alpha \Rightarrow \alpha = 0 \text{ lub } \alpha = 1$$

Stan próżni spełnia  $a_s |0\rangle = 0$ ,  
dla dowolnego stanu oznaczonego przez  $s$ .

Stany jedno cząstkowe

$$|1_r\rangle = a_r^\dagger |0\rangle$$

$r$  indeks  
stanu

$$|1_r 1_r\rangle = a_r^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = 0$$

Dwie cząstki nie mogą być w tym samym stanie.

$$|1_r 1_s\rangle \equiv a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle$$

$$|1_s 1_r\rangle \equiv a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle$$

$$= -|1_r 1_s\rangle.$$

Antysymetria stanów wynika z reguł antykomutacji!

Rozwinięcie na fale płaskie

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \sum_{\alpha=1,2}^{\pm} \left( b_{\alpha}(\vec{k}) u_{\alpha}(\vec{k}) e^{-ikx} + d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) v_{\alpha}(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$\bar{\Psi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \sum_{\alpha=1,2} \left( b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) \bar{u}_{\alpha}(\vec{k}) e^{ikx} + d_{\alpha}(\vec{k}) \bar{v}_{\alpha}(\vec{k}) e^{-ikx} \right)$$

Teraz reguły antykomutacji pól przechodzą na  $b(\vec{k})$  i  $d(\vec{k})$ :

$$\{b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{k}')\} = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\alpha'} 2E_k \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\{d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{k}')\} = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\alpha'} 2E_k \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\{b_{\alpha}(\vec{k}), b_{\alpha'}(\vec{k}')\} = 0$$

$$\{b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\alpha'}(\vec{k}')\} = 0$$

$$\{d_{\alpha}(\vec{k}), d_{\alpha'}(\vec{k}')\} = 0$$

$$\{d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}), d_{\alpha'}^{\dagger}(\vec{k}')\} = 0$$

Hamiltonian

$$H = N \left( \int d^3x \mathcal{H} \right)$$

↑ normalne uporządkowanie

Można pokazać, że

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\alpha}(\vec{k}) + d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) d_{\alpha}(\vec{k}) \right]$$

Podobnie ładunek pola  $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = N \left( \int d^3x \psi^{\dagger} \psi \right) =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \sum_{\alpha=1,2} \left[ b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) b_{\alpha}(\vec{k}) - d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) d_{\alpha}(\vec{k}) \right]$$

Oznacza to, że  $b^{\dagger}$  tworzy fermion  
a  $d^{\dagger}$  tworzy antyfermion, które  
mają przeciwny znaki.

Uwaga: iloczyn normalny dla  
fermionów  $N(\bar{\Psi}_{\alpha} \Psi_{\beta}) = i \bar{\Psi}_{\alpha} \Psi_{\beta} i$

$$= \bar{\Psi}_{\alpha}^{(+)} \Psi_{\beta}^{(+)} + \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)} \Psi_{\beta}^{(+)} + \bar{\Psi}_{\alpha}^{(-)} \Psi_{\beta}^{(-)}$$

$\rightarrow \Psi_{\beta}^{(-)} \Psi_{\alpha}^{(+)}$



Propagator Feynmana dla  
pola Diraca

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p \cdot (x-y)}$$

Pole elektromagnetyczne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \left[ \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + \epsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx} \right]$$

w tym rozwinięciu na fale płaskie  $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$  jest wektorem polaryzacji fotonu. Dla cząstki bezmasowej o spinie 1 mamy tylko dwa niezależne stany polaryzacyjne dla danego  $\vec{k}$

Propagator Feynmana

$$i \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = i g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}$$

wszystko to były najwazniejsze informacje dotyczące pol swobodnych. Teraz wprowadzamy oddziaływania między polami.

Najbardziej interesuj $\acute{a}$  mnie oddziaływania elektromagnetyczne i procesy  $(e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-)$   
(nukleon)  $e^- + N \rightarrow e^- + N$   
(deuteron)  $e^- + d \rightarrow e^- + d$

Spreziewil minimalne  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  podstawil w swobodnym lagrangianie Diraca

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi$$

$$\not{\partial} \rightarrow \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \equiv \not{D}$$

Dodajemy lagrangian dla swobodnego pola fotonowego i dostajemy lagrangian, ktory ma opisa $\acute{c}$  wszystkie procesy z udziałem elektronów, pozytronów i fotonów:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

gdzie  $e = +\sqrt{4\pi\alpha} \approx \sqrt{4\pi/137}$

Lagrangian oddziaływania  
(właściwie gęstość Lagrangianu)

$$\mathcal{L}_I = \bar{\Psi} (+e \gamma^\mu A_\mu) \Psi$$

opisuje sprzężenie zachowanego  
prądu leptonowego

$$j^\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

z polem elektromagnetycznym.

Jestli zastosujemy przepis

$$\mathcal{L}_I = N (\bar{\Psi} e \gamma^\mu A_\mu \Psi)$$

normalnego uporządkowania,  
prośniowe wartości oczekiwane  
wielkości mieralnych (energii, pędu,  
ładunku) znikają.

Teraz w zasadzie, mając  
kompletny Lagrangian,  
powinniśmy móc opisać dowolne  
procesy, w których cząstki są  
rozpraszane, tworzone i anihilowane.  
Wymagałoby to rozwiązywania  
skomplikowanych nieliniowych równań  
dla zadanych warunków.

W praktyce, przynajmniej dla QED,  
wzywamy rachunku zaburzeń,  
dzieląc hamiltonian na część  
odnoszącą się do pól swobodnych  
i do ich oddziaływania

$$H = H_0 + H_I$$

oraz traktując  $H_I$  jako zaburzenie.

Jest to usprawiedliwione tym, że  
stała sprzężenia elektronów

i fotonów (stała struktury subtelnej)

$\alpha \approx \frac{1}{137}$ . To podejście okarato  
się bardzo skuteczne, a QED jest  
chyba najdokładniejszą teorią, jaką  
stworzyła fizyka.

w tym podejściu kluczowe staje się wykorzystanie tw. obraru Diraca (inaczej obraru oddziaływania) w razie potrzeby polecam notatki obrary - Schroedingera - Heisenberga - Diraca.pdf

Stacrego?

w obraru oddziaływania (IP) operatory spełniają równania znanne z obraru Heisenberga

$$i \frac{d}{dt} O^{IP}(t) = [O^{IP}(t), H_0]$$

Jeśli gęstość Lagrangianu oddziaływania nie zawiera pochodnych pól (tak jest dla QED), pola kanonicznie sprzężone do pól oddziałujących i do pól swobodnych są takie same.

obraru oddziaływania (IP) i obraru Heisenberga (HP) są powiązane unitarną transformacją

$$O^{IP}(t) = U(t) O^{HP} U^\dagger(t),$$

$$|A, t\rangle_{IP} = U(t) |A\rangle_{HP},$$

$$\text{gdzie } U(t) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$$

Dlatego pola oddziaływające spełniają te same reguły komutacji, co pola swobodne.

W obrębie oddziaływania pola oddziaływające spełniają te same równania ruchu i te same relacje komutacji jak operatory pól swobodnych. Oznacza to w szczególności, że rozwinięcia na fale płaskie otrzymane dla pól swobodnych, operatory liczy cząstek, wyrażenia na propagatory Feynmana zachowują ważność!

Uwaga: pola są operatorami!

W obrębie oddziaływania układ jest opisywany przez zależny od czasu wektor stanu  $|\Phi(t)\rangle_{IP}$ , który spełnia

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_{IP} = H_I^{IP}(t) |\Phi(t)\rangle_{IP},$$

gdzie

$$H_I^{IP}(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$H_{\pm}^{IP}(t)$  jest hamiltonianem oddziaływania w obracie oddziaływania  $H_{\pm}^S$  oraz  $H_0^I = H_0^S$  są odpowiednio hamiltonianem oddziaływania i hamiltonianem pól swobodnych w obracie Schrödingera.

$H_{\pm}^{IP}(t)$  powstaje przez zastąpienie w  $H_{\pm}^S$  operatorów w obracie Schrödingera przez zależne od czasu operatory pól swobodnych.

Zakładamy, że układ fizyczny jest w stanie  $|i\rangle$  w chwili początkowej  $t_i$ .

$|\Phi(t_i)\rangle = |i\rangle$ . Stan  $|i\rangle$  opisuje stan początkowy, na długo przedtem, nim nastąpi oddziaływanie ( $t_i \rightarrow -\infty$ ), przez podanie określonej liczby elektronów, pozytronów i fotonów oraz pędów, momentów spinów i wektorów polaryzacji.

w procesie oddziaływania  
(rozpraszania) cząstki zbliwiają się  
do siebie, zderzają i oddalają się  
od siebie. Rozważanie

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_{IP} = H_I^{IP}(t) |\Phi(t)\rangle_{IP}$$

określa stan  $|\Phi(\infty)\rangle$ , do którego  
ewoluuje stan początkowy dla  $t \rightarrow \infty$ ,  
dlugo po tym, jak rozpraszanie się  
kończy i wszystkie cząstki są  
daleko od siebie.

Wprowadzamy operator  $S$  mający  
rozpraszania o tej własności, że

$$|\Phi(\infty)\rangle = S |\phi(-\infty)\rangle \equiv S |i\rangle.$$

Rozpraszanie może prowadzić  
do wielu różnych stanów końcowych  
i wszystkie te możliwości są  
zawarte w  $|\Phi(\infty)\rangle$ . Każdy z możliwych  
stanów końcowych  $|f\rangle$  jest definiowany  
w sposób analogiczny do  $|i\rangle$



Prawdopodobieństwo przejścia do stanu  $|f\rangle$  w wyniku zderzenia jest dane wzorem

$$|\langle f | \Phi(\infty) \rangle|^2.$$

$$\langle f | \Phi(\infty) \rangle = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$$

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f | \Phi(\infty) \rangle$$

układ zupełny stanów ortogonalnych

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_f S_{fi} |f\rangle$$

Unitarność macierzy  $S$

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$$

Równanie  $i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_{IP} = H_I^{IP}(t) |\Phi(t)\rangle_{IP}$  i warunków początkowy  $|\Phi(t_i)\rangle = |i\rangle$ , mogą zostać formalnie rozwiązane

$$|\Phi(t)\rangle_{IP} = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I^{IP}(t_1) |\Phi(t_1)\rangle,$$

ale to równanie może być rozwiązane tylko przez iteracje:

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I^{IP}(t_1) |i\rangle \\ + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I^{IP}(t_1) H_I^{IP}(t_2) |\Phi(t_2)\rangle,$$

i tak dalej. w granicy  $t \rightarrow \infty$  macierz  $S$  można zapisać w postaci

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n$$

$$H_I^{IP}(t_1) \dots H_I^{IP}(t_n) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n$$

$$T(H_I^{IP}(t_1) \dots H_I^{IP}(t_n)) \leftarrow \text{iloczyn chronologiczny}$$

w wyrażeniu  $T(H_I^{IP}(t_1) H_I^{IP}(t_2) \dots H_I^{IP}(t_n))$  czynniki są uporządkowane w taki sposób, że czasy poruszają się od prawej do lewej. Zakładamy, że wszystkie pola bosonowe (fermionowe) komutują (antykomutują).

Równość (!) zachodzi tylko w przypadku, gdy  $H_I$  zawiera parzystą liczbę pól fermionowych i jest spełniona wtedy osobno dla każdego składnika szeregu.

W zapisie z gęstością hamiltonianu

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n$$

$$T (H_I(x_1) H_I(x_2) \dots H_I(x_n))$$

Ten wzór to tw. rozwinięcia Dysona dla macierzy  $S$ .

Jak znaleźć w rozwinięciu  $S$  składniki odpowiadające ra macierz  $\langle f | S | i \rangle$ ?

To nie jest proste. Może się wydawać na przykład, że  $|i\rangle$  i  $|f\rangle$  są stanami własnymi niezaburzonego hamiltonianu dla nieoddziałujących pól  $H_0$ , gdy  $H_I = 0$ . Tak nie jest, bo rzeczywiste fizyczne cząstki pamiętają oddziaływanie, nawet gdy są daleko od siebie. Elektron, nawet daleko od innych elektronów, jest otoczony przez swoją własną chmurę fotonową. Realny elektron jest "ubrany" w przeciwieństwie do "gołego" elektronu, który występuje dla pola swobodnego.

Na szczęście ograniczymy się do procesów w najniższym rzędzie rachunku zaburzeń i będziemy używać tylko składników z najniższym  $n$  w rozwinięciu Dysona, które dają wkład do  $\langle f | S | i \rangle$ . W takim przypadku oddziaływanie prowadzi wyłącznie do zmiany stanu, a nie do uzbierania "gołych" cząstek.

Dlatego dla nas  $|i\rangle$  oraz  $|f\rangle$  będą stanami własnymi teorii bez oddziaływań.

Potrzebujemy jeszcze dodatkowego narzędzia, które pozwala przejść od iloczynu chronologicznego  $T$  do iloczynu normalnego operatorów pola w obrębie oddziaływania  
→ twierdzenie Wicka.

Podobnie jak w przypadku...

Rozważmy na przykład  
proces Comptona

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

Gęstość hamiltonianu oddziaływania

w QED:  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -eN(\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi)$

Ponieważ częstotliwości  $A^{(-)}$ ,  $\bar{\Psi}^{(-)}$ ,  $\Psi^{(-)}$   
( $A^{(+)}$ ,  $\bar{\Psi}^{(+)}$ ,  $\Psi^{(+)}$ ) z ujemnymi (dodatnimi)  
częstotliwościami są liniowe

w operatorach kreacji (anihilacji)  
dla fotonów, elektronów i pozytronów,  
jedyny iloczyn normalny, który daje  
wkład do rozpraszania Comptona

ma postać  $\bar{\Psi}^{(+)} A^{(+)} \Psi^{(+)} A^{(+)}$

$$|i\rangle = c^\dagger(\vec{p}, s) a^\dagger(\vec{k}, \epsilon^\mu) |0\rangle$$

$$|f\rangle = c^\dagger(\vec{p}', s') a^\dagger(\vec{k}', \epsilon'^\mu) |0\rangle$$

Rozpraszanie Comptona i wszystkie  
inne ważne reakcje wymagają  
członów drugiego rzędu w rozwinięciu  
perturbacyjnym macierzy  $S$ .

Aby policzyć amplitudę rozpraszania  $\langle f|S|i \rangle$  wprost z tw. Wicka, niezbędny jest wagi 'bardzo żmudny rachunek.

Na szczęście istnieje droga na skróty, która zaczyna się od rysowania obrasków  $\rightarrow$  diagramy Feynmana

Wcześniej chcemy policzyć  $\langle f|S-1|i \rangle$ , bo nie interesują nas procesy bez rozpraszania.

Elementy macierzy  $S$  mają w ogólnym przypadku następującą postać

$$\langle f|S|i \rangle = \delta_{fi} \leftarrow \text{brak rozpraszania}$$

$$+ i (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$$

zachowanie całkowitego czteropędu (energii i pędu)

$$M_{fi}$$

amplituda rozpraszania, z której liczymy przekroje czynne i szybkości rozpadu

Lagrangian QED, który do tej pory  
rowaialiśmy obejmował elektrony,  
pozytrony i fotony. Co zrobić, gdy  
chcemy opisać proces

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^- ?$$

Trzeba w gęstości Lagrangianu  
uwzględnić pole Diraca dla  
mionów i antimionów

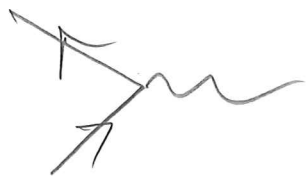
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{\Psi}_e (i \not{D} - m_e) \Psi_e \\ & + \bar{\Psi}_\mu (i \not{D} - m_\mu) \Psi_\mu \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

(Gdy mamy do czynienia z kilkoma  
polami fermionowymi, zakładamy,  
że operatory pola dla różnych pól  
fermionowych antykomutują.  
Zakładamy także, że operatory pola  
dla bozonów i fermionów komutują.)

$$\mathcal{H}_I = N (\mathcal{L}_I^e + \mathcal{L}_I^\mu)$$

O czym w uproszczeniu mówi nam  $\mathcal{H}_I$ , gdy zaczniemy wywodzić reguły Feynmana i rysować diagramy Feynmana?

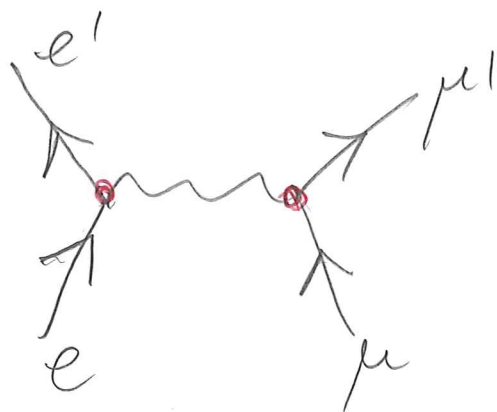
Na przykład o tym, że elementarną cegielką w QED ma postać



Możemy ją obracać, doklejać do innych cegiełek tego typu, w zależności od wyboru stanu początkowego i końcowego.

Na przykład dla rozpraszania  $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$

czas  $\uparrow$

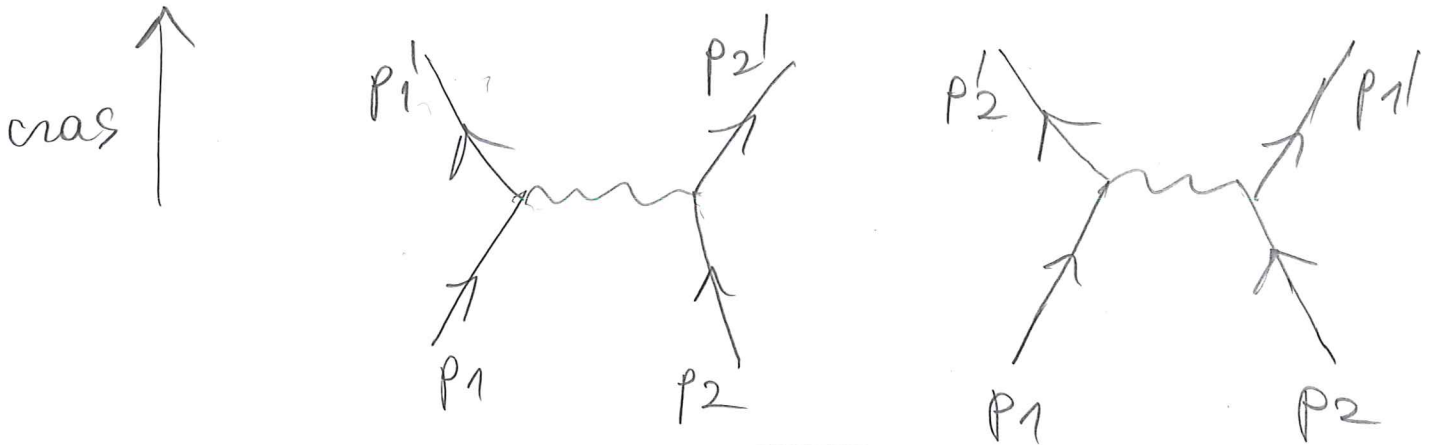


liczba wierzchołków zależy o rzędzie rachunku zaburzeń

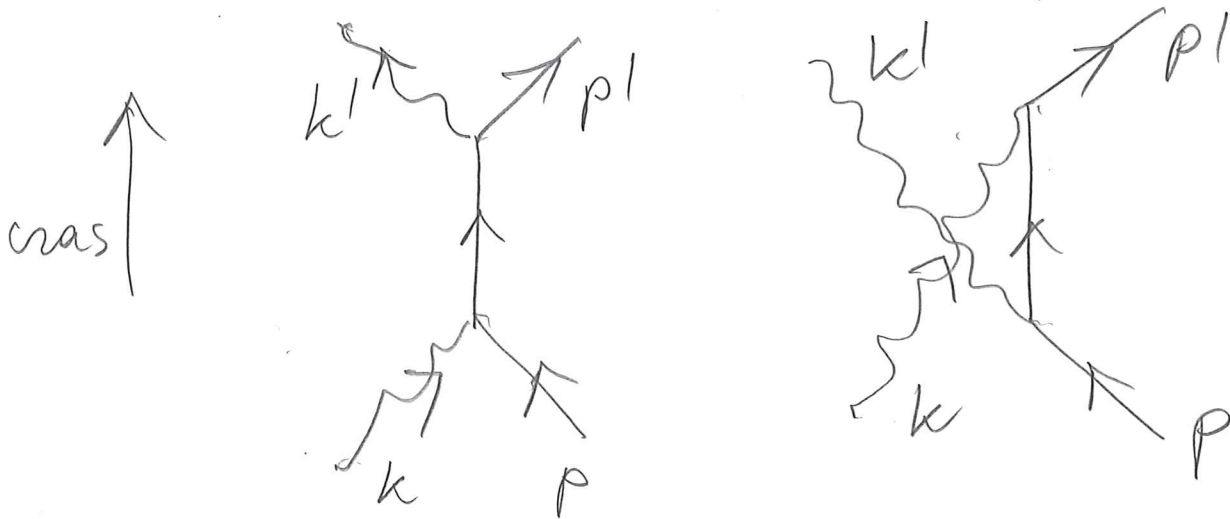
Mamy tylko jeden diagram w drugim rzędzie



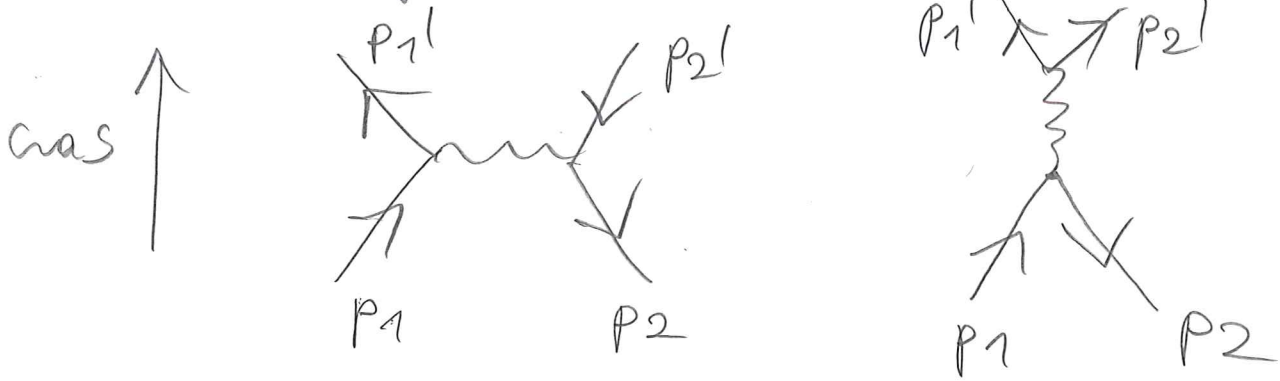
Dla procesu  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$   
 jest trudniej, bo mamy  
 w najmniejszym rzędzie  
 dwa diagramy



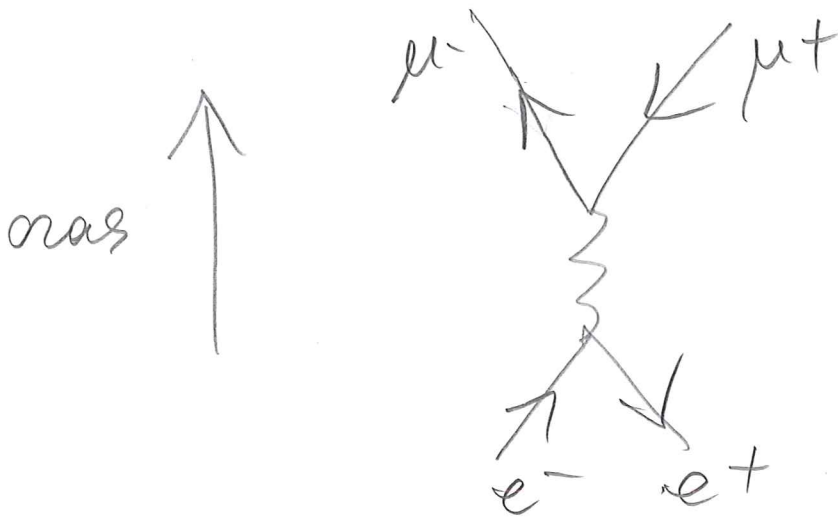
Dwa diagramy występują  
 także dla procesu Comptona



rozpraszanie  $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$



Anihilacja pary  $e^- e^+$   
i tworzenie pary  $\mu^- \mu^+$   
 $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$



Ostrzeżenie: uwzględnienie poprawek wyższych rzędów — rachunka zaburzeń dla wyżej wymienionych i innych procesów elektromagnetycznych nie jest proste!

Obecny wykład z konieczności  
zawiera trochę luki i wymaga  
uzupełnienia. Polecam podręczniki,  
wykłady wprowadzające w teorię  
pola, na przykład podręcznik  
z wieloma szeregowymi  
prelekcjami

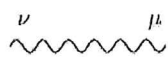
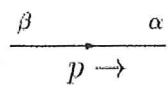
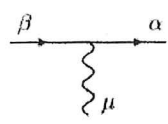
F. Mandl and G. Shaw,  
Quantum Field Theory,  
Wiley, 1984.

# An Introduction to QED and QCD

Jeff Forshaw

Department of Physics and Astronomy  
University of Manchester  
Manchester M13 9PL

<http://www.hep.man.ac.uk/u/forshaw/NorthWest/QED.pdf>

For every ...	draw ...	write ...
Internal photon line		$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$
Internal fermion line		$\frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Vertex		$-ie\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$
Outgoing electron		$\bar{u}_s(p)$
Incoming electron		$u_s(p)$
Outgoing positron		$v_s(p)$
Incoming positron		$\bar{v}_s(p)$
Outgoing photon		$\epsilon^{*\mu}$
Incoming photon		$\epsilon^{\mu}$

- Attach a directed momentum to every internal line
- Conserve momentum at every vertex

Table 4.1 Feynman rules for QED.  $\mu, \nu$  are Lorentz indices and  $\alpha, \beta$  are spinor indices.