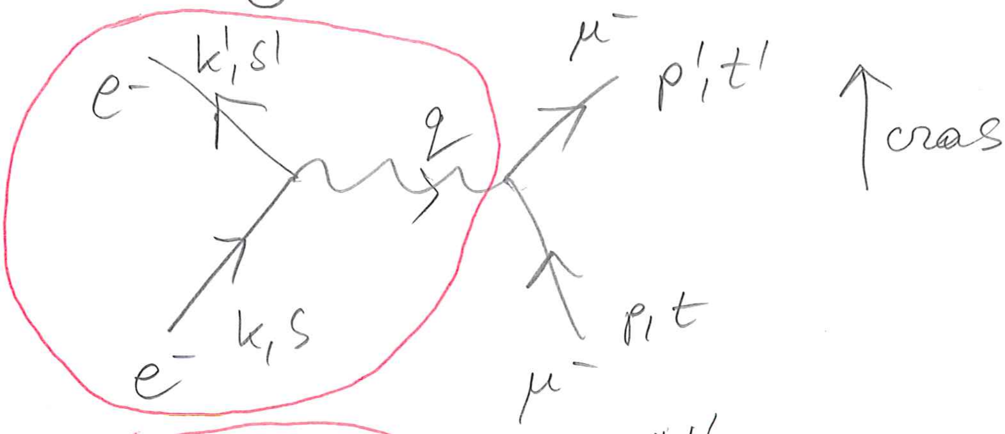
Wykład 13 W2FT 2020

rozpraszanie elastyczne

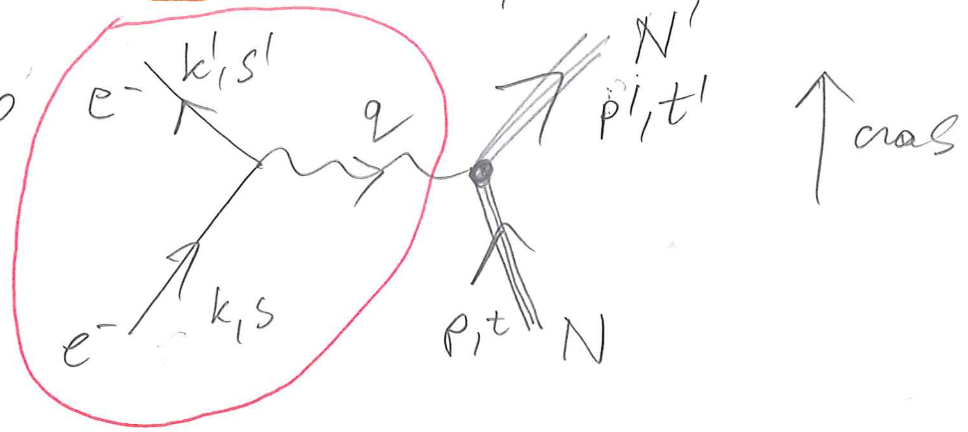
elektron - nukleon

$e + N \to e' + N'$

Przechodzimy od



do



Na początek dobre wiadomości

1. Kinematyka dla procesów $e + \mu \to e + \mu$ i $e + N \to e + N$ jest taka sama, z oczywistą zmianą $m_\mu \to m_N$

2. Część zakreślona na czerwono jest taka sama dla obu procesów

3. Liniom dla początkowego i końcowego nukleonu przypiszemy te same wyrażenia co liniom mionowym

Pomimo tego, że nukleon (proton, neutron) jest cząstką o spinie $\frac{1}{2}$, to nie jest punktową cząstką Diraca. Dlatego wierzchołek nukleonowy musi mieć inną postać!
Całe "ramię" nukleonowe wygląda tak:

$$N^\alpha = \bar{u}(p',t')\left(F_1\gamma^\alpha + \frac{iF_2}{2M}(p'-p)_\rho\sigma^{\alpha\rho}\right)u(p,t).$$

$M \equiv m_N$ to masa nukleonu,

$\sigma^{\alpha\rho} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\alpha, \gamma^\rho\right]$,

$F_i = F_i\left((p'-p)^2\right)$ to tzw. czynniki kształtu (form factors), które są rzeczywistymi funkcjami kwadratu przekazu czteropędu. Ten sam wzór na N^α obowiązuje dla protonu i neutronu, ale formfaktory F_1 i F_2 są inne: F_1^p, F_2^p, F_1^n, F_2^n.

Skąd biorą się formfaktory?

Oddziaływania elektromagnetyczne nukleonów wynikają z ich struktury i oddziaływań (EM i silnych) składowych (kwarków).

Formfaktory F_1 i F_2 uwzględniają rozkład ładunku i momentu magnetycznego w nukleonie i fakt, że moment magnetyczny nukleonu jest "anomalny", tzn. inny niż wynikałby to z równania Diraca.

Wzór na N^α jest najbardziej ogólny, biorąc pod uwagę lorentzowską współzmienniczość, hermitowskość oraz niezmienniczość cechowania (związaną z zachowaniem ładunku elektrycznego).

$F_1(0)$ jest całkowitym ładunkiem elektrycznym nukleonu w jednostkach ładunku protonu

$F_2(0)$ opisuje anomalny moment magnetyczny nukleonu

$F_1^p(0) = 1$, $F_1^n(0) = 0$

$F_2^p(0) = 1.79284$, $F_2^n(0) = -1.91304$

Uwaga:

$q^2 \equiv (p'-p)^2$ jest jedynym skalarem lorentzowskim, jaki można zbudować z czterowektorów p i p'

$p^2 = p'^2 = M^2$

$(p'-p)^2 = 2M^2 - 2p \cdot p'$

$(p'+p)^2 = 2M^2 + 2p \cdot p'$

Pomiary formfaktorów nukleonowych i opracowywane modele teoretyczne są bardzo ważną dziedziną fizyki, gdzie QCD spotyka się z QED, a fizyka cząstek elementarnych łączy się z fizyką jądrową i nawet fizyką atomową.

Nie mamy tarczy neutronowej, więc lekkie jądra atomowe (^2H, ^3He) są wykorzystywane jako efektywne tarcze neutronowe. To jednak wymaga wiedzy na temat budowy jąder oraz tzw. efektów oddziaływania w stanie końcowym między fragmentami jąder (final-state interactions)

$$e + d \to e + d$$
$$e + d \to e + p + n$$
$$e + {}^3H \to e + {}^3H$$
$$e + {}^3H \to e + n + d$$
$$e + {}^3H \to e + n + n + p$$
$$e + {}^3He \to e + {}^3He$$
$$e + {}^3He \to e + p + d$$
$$e + {}^3He \to e + p + p + n$$

Powstało bardzo wiele modeli elektromagnetycznych formfaktorów nukleonowych. Część z nich to proste dopasowanie do danych doświadczalnych (np. dopasowanie dipolowe oparte na przepisie $\left(1 + \frac{|q^2|}{\Lambda^2}\right)^{-2}$).

Inne są wyprowadzane z QCD, lub bazują na powiązanej z QCD chiralnej efektywnej teorii pola.

Często używane są liniowe kombinacje F_1 i F_2, tzw. formfaktory Sachsa:

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M^2} F_2(q^2)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2)$$

G_E – elektryczny formfaktor

G_M – magnetyczny formfaktor

Dla rozpraszania $e + N \to e + N$ zastosujemy pakiet FeynCalc, by otrzymać $|L_\alpha N^\alpha|^2$

$$L_\alpha = \bar{u}(k', s') \gamma_\alpha u(k, s)$$

$$N^\alpha = \bar{u}(p', t') \left(F_1 \gamma^\alpha + \frac{i F_2}{2M} (p' - p)_\rho \sigma^{\alpha\rho} \right) u(p, t)$$

Korzystając z tożsamości zwanej rozkładem Gordona prądu nukleonowego

$$N^\alpha = \bar{u}(p', t') \left((F_1 + F_2) \gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M} (p + p')^\alpha \mathbb{1} \right) u(p, t)$$

$$|L_\alpha N^\alpha|^2 = (L_\alpha)^* L_\beta (N^\alpha)^* N^\beta$$

$$(L_\alpha)^* = \ldots = \bar{u}(k, s) \gamma_\alpha u(k', s')$$

$$(N^\alpha)^* = (N^\alpha)^+ = \qquad \boxed{F_1, F_2 \in \mathbb{R}}$$

$$(u(p,t))^+ \left((F_1+F_2)\gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \mathbb{1} \right)^+ (\bar{u}(p',t'))^+$$

$$= (u(p,t))^+ \gamma^0\gamma^0 \left((F_1+F_2)\gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \mathbb{1} \right)^+ \gamma^0 u(p',t')$$

$$= \bar{u}(p,t)\left((F_1+F_2)\gamma^0(\gamma^\alpha)^+\gamma^0 - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \gamma^{0\,2} \right) u(p',t')$$

$$= \bar{u}(p,t)\left((F_1+F_2)\gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \right) u(p',t')$$

$$|A|^2 = \bar{u}(k,s)\gamma_\alpha u(k',s')\,\bar{u}(k',s')\gamma_\beta u(k,s)$$

$$\bar{u}(p,t)\left((F_1+F_2)\gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \right) u(p',t')$$

$$\bar{u}(p',t')\left((F_1+F_2)\gamma^\beta - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\beta \right) u(p,t) =$$

$$= \tilde{L}_{\alpha\beta}\,\tilde{N}^{\alpha\beta}$$

$$\tilde{L}_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left(u(k,s)\bar{u}(k,s)\gamma_\alpha u(k',s')\bar{u}(k',s')\gamma_\beta \right)$$

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\Big(u(p,t)\bar{u}(p,t)\left((F_1+F_2)\gamma^\alpha - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\alpha \right)$$

$$u(p',t')\bar{u}(p',t')\left((F_1+F_2)\gamma^\beta - \frac{F_2}{2M}(p+p')^\beta \right)\Big)$$

$$u(k,s)\,\bar{u}(k,s) = \frac{1}{2}(\not{k}+m)(1+\gamma_5 \not{s})$$

$$u(p,t)\,\bar{u}(p,t) = \frac{1}{2}(\not{p}+M)(1+\gamma_5 \not{t})$$

$$u(k',s')\,\bar{u}(k',s') = \frac{1}{2}(\not{k}'+m)(1+\gamma_5 \not{s}')$$

$$u(p',t')\,\bar{u}(p',t') = \frac{1}{2}(\not{p}'+M)(1+\gamma_5 \not{t}')$$

$$k^2 = k'^2 = m^2$$

$$p^2 = p'^2 = M^2 .$$

$$k + p = k' + p'$$

$$(k+p)^2 = (k'+p')^2$$

$$k^2 + p^2 + 2k\cdot p = k'^2 + p'^2 + 2k'\cdot p'$$

$$\Longrightarrow k\cdot p = k'\cdot p'$$

$$k - p' = k' - p$$

$$(k-p')^2 = (k'-p)^2 \Longrightarrow k\cdot p' = k'\cdot p$$

$$k - k' = p' - p$$

$$(k-k')^2 = (p'-p)^2$$

$$2m^2 - 2k\cdot k' = 2M^2 - 2p\cdot p'$$

$$\Rightarrow p\cdot p' = M^2 - m^2 + k\cdot k'$$

Korzystając z zasady zachowania energii i pędu, możemy zapisać

$$p' = k + p - k'$$

Używając FeynCalc możemy łatwo uzyskać $\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}$ i $\hat{N}^{\alpha\beta}$. Zwężenie tych tensorów jest długim wyrażeniem zawierającym różne iloczyny skalarne czterowektorów. Aby uprościć długie wyrażenie na $\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{N}^{\alpha\beta}$, wykorzystujemy w najogólniejszym przypadku wszystkich spolaryzowanych cząstek (bez sumowań po s, t, s' i t') następujące związki

$k \cdot k = m^2$, $k \cdot s = 0$, $k' \cdot k' = m^2$, $k' \cdot s' = 0$

$p \cdot p = M^2$, $p \cdot t = 0$, $p' \cdot p' = M^2$, $p' \cdot t' = 0$

$s^2 = -1$, $s'^2 = -1$, $t^2 = -1$, $t'^2 = -1$

$k + p = k' + p'$

$(k+p)^2 = (k'+p')^2 \Rightarrow k \cdot p = k' \cdot p'$

$$k - k' = p' - p$$

$$(k-k')^2 = (p'-p)^2$$

$$k^2 + k'^2 - 2k\cdot k' = p'^2 + p^2 - 2p\cdot p'$$

$$2m^2 - 2k\cdot k' = 2M^2 - 2p\cdot p'$$

$$p\cdot p' = k\cdot k' - m^2 + M^2$$

Rachunki są przeprowadzone w następujących notatnikach

- electron_nucleon_from_traces_fully_polarized.nb
(wszystkie cząstki są spolaryzowane; s, t, s' i t' - określone)
- electron_nucleon_from_traces_initially_polarized.nb
(obie cząstki w stanie początkowym są spolaryzowane, a polaryzacje cząstek wylatujących nie jest mierzona; s i t - określone, sumowanie po s' i t')

- electron_nucleon_from_traces_unpolarized.nb
(żadna z cząstek nie jest spolaryzowana; suma po s', t' oraz średnia po s i t)

Uwaga:
W sytuacji, gdy <u>tylko jedna</u> z cząstek jest spolaryzowana w stanie początkowym, dostajemy wynik jak dla przypadku bez polaryzacji

- electron_nucleon_from_traces_initially_polarized_electron.nb
- electron_nucleon_from_traces_initially_polarized_nucleon.nb

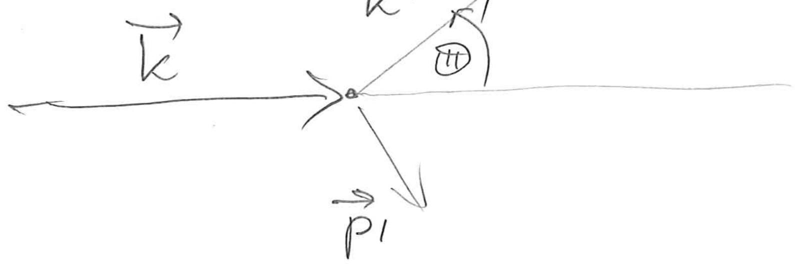
W kontekście rozpraszania elektron-nukleon najczęściej wspominany jest wzór Rosenblutha, opisujący niespolaryzowany przypadek rozpraszania ultrarelatywistycznego elektronu na spoczywającym nukleonie

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\hat{k}'} \equiv \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_e} =$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\hat{k}'}\right)_{Mott} \left\{ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau G_M^2 \, tg^2 \frac{\Theta}{2} \right\},$$

$$\tau \equiv -\frac{q^2}{4M^2} > 0;$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\hat{k}'}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2\frac{\Theta}{2}}{4E^2 \sin^4\frac{\Theta}{2}\left(1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)}$$



W tym wyrażeniu masa elektronu jest przyjęta za równą zero: $E = k^0 = |\vec{k}|$

Czym jest N^α?
Czy możemy wykorzystać N^α w opisie rozpraszania elektronów na jądrach atomowych?

$N^\alpha \equiv N^\alpha(p, t, p', t')$ jest elementem macierzowym operatora prądu elektromagnetycznego pojedynczego nukleonu w przestrzeni pędowej:

$$N^\alpha = \langle \vec{p}\,' t' | j^\alpha_{1N} | \vec{p}\, t \rangle$$

Jeśli stany jądrowe opisywane są w ramach nierelatywistycznego równania Schrödingera, to relatywistyczną postać N^α należy odpowiednio dopasować do stanów jądrowych i przeprowadzić tzw. nierelatywistyczną redukcję wyrażeń na N^0 oraz N^i $(i=1,2,3)$

we wzorze na przekrój czynnik do σ występowały czynniki $\frac{1}{\sqrt{2E}}$ i $\frac{1}{\sqrt{2E'}}$

$$\left(E \equiv p^0 \equiv \sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}}\,,\; E' \equiv p'^0 \equiv \sqrt{m^2+\vec{p}'^{\,2}} \right)$$

Te czynnik też mają charakter relatywistyczny, więc przy redukcji nierelatywistycznej wygodnie jest rozpatrywać zmienioną formułę na $u(p,t)$:

$$u(p,t) \to \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \chi_t \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\chi_t \end{pmatrix},$$

gdzie m oznacza teraz masę nukleonu. Będziemy też używać $\hat{F}_2 \equiv \frac{F_2}{2m}$!

$$\langle \vec{p}'t' | j^{\mu}_{1N} | \vec{p}\,t \rangle =$$

$$\bar{u}(p',t')\left(F_1\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu \hat{F}_2\right)u(p,t) =$$

$=$ (rozkład Gordona prądu)

$$\bar{u}(p',t')\left(G_M\gamma^\mu - \hat{F}_2 (p'+p)^\mu \mathbb{1}\right)u(p,t)$$

uwaga: $\overset{M}{\approx}$ we wzorach na kolejnych stronach oznacza rozwinięcie w szereg przy pomocy programu Mathematica

$$N^0 = \bar{u}(p',t')\left(G_M\gamma^0 - \tilde{F}_2(p'+p)^0\right)u(p,t) =$$

$$= u^+(p',t')\gamma^0 G_M \gamma^0 u(p,t)$$
$$- \tilde{F}_2(p'^0+p^0)\bar{u}(p',t')u(p,t) =$$

$$= G_M u^+(p',t')u(p,t)$$
$$- \tilde{F}_2(p'^0+p^0)\bar{u}(p',t')u(p,t)$$

$$u(p,t) = \sqrt{\frac{p^0+m}{2p^0}}\begin{pmatrix} \chi_t \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p^0+m}\chi_t \end{pmatrix}$$

$$u(p',t') = \sqrt{\frac{p'^0+m}{2p'^0}}\begin{pmatrix} \chi_{t'} \\ \frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}}{p'^0+m}\chi_{t'} \end{pmatrix}$$

$$p^0 \equiv \sqrt{m^2+\vec{p}^2}\,,\quad p'^0 = \sqrt{m^2+\vec{p}'^2}$$

$$H \equiv \sqrt{p^0+m}\sqrt{p'^0+m}\,\frac{1}{2\sqrt{p^0p'^0}}$$

$$N_I^0 \equiv H G_M\, \chi_{t'}^+\left(1, \frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}}{p'^0+m}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p^0+m}\end{pmatrix}\chi_t$$

$$= H G_M \chi_{t'}^+\left(1 + \frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}\;\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{(p'^0+m)(p^0+m)}\right)\chi_t$$

$$\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}\;\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \vec{p}\cdot\vec{p}'\,1 + i(\vec{p}'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}$$

$$N_I^0 = H G_M \chi_{t'}^\dagger \left(1\!\!1 + \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}\,' \, 1\!\!1}{(p'^0+m)(p^0+m)} + i\,\frac{(\vec{p}\,'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{(p'^0+m)(p^0+m)} \right) \chi_t =$$

$$= \underbrace{G_M \left(H + \frac{H\vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{(p'^0+m)(p^0+m)} \right)}_{S_1} \chi_{t'}^\dagger \chi_t$$

$$+ \chi_{t'}^\dagger G_M \underbrace{\frac{H i(\vec{p}\,'\times\vec{p})}{(p'^0+m)(p^0+m)}}_{S_2} \chi_t$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\overset{M}{\approx} 1 - \frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}{8m^2} \\ S_2 &\overset{M}{\approx} \frac{1}{4m^2} \end{aligned}\right\}$$

zakładając $\vec{p}^{\,2} \ll m^2$, $\vec{p}\,'^2 \ll m^2$

$$N_I^0 \approx \left(1 - \frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}{8m^2}\right) G_M \underbrace{\chi_{t'}^\dagger \chi_t}_{\text{tu spin jest zachowany}}$$

$$+ \underbrace{G_M \chi_{t'}^\dagger \frac{i(\vec{p}\,'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{4m^2} \chi_t}_{\text{tu może zajść zmiana spinu}}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^0_{\mathbb{1}} = -\tilde{F}_2 (p'^0 + p^0)\, \bar{u}(p',t')\, u(p,t) =$$

$$= -\tilde{F}_2 (p'^0 + p^0)\, u^+(p',t')\, \gamma^0\, u(p,t) =$$

$$= -\tilde{F}_2 H (p'^0 + p^0)\, \chi^+_{t'} \left(\mathbb{1}, -\frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}}{p'^0+m}\right) \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p^0+m} \end{pmatrix} \chi_t$$

$$= -\tilde{F}_2 H (p'^0 + p^0)\, \chi^+_{t'} \left(\mathbb{1} - \frac{\vec{p}'\cdot\vec{\sigma}\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{(p'^0+m)(p^0+m)}\right) \chi_t$$

$$= -\tilde{F}_2 H (p'^0 + p^0)\, \chi^+_{t'} \left(\mathbb{1} - \frac{\vec{p}'\cdot\vec{p}\,\mathbb{1}}{(p'^0+m)(p^0+m)} - \frac{i(\vec{p}'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{(p'^0+m)(p^0+m)}\right) \chi_t$$

$$= -\tilde{F}_2\, S_3\, \chi^+_{t'} \chi_t$$

$$- \tilde{F}_2\, S_4\, \chi^+_{t'}\, i(\vec{p}'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}\, \chi_t$$

M

$$\hat{=} -\tilde{F}_2 \left(2m + \frac{(\vec{p}'-\vec{p})^2}{4m}\right) \chi^+_{t'} \chi_t$$

$$- \tilde{F}_2 \left(-\frac{1}{2m}\right) \chi^+_{t'}\, i(\vec{p}'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}\, \chi_{t'}$$

Dodając N^0_I i N^0_{II}, otrzymujemy

$$N^0 \approx \Big(G_M - G_M \frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}{8m^2} - 2m\tilde{F}_2$$
$$-2m\tilde{F}_2 \frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}{8m^2} \Big) \chi^+_{t'} \chi_t$$
$$+ G_M \chi^+_{t'} \frac{i(\vec{p}\,'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{4m^2} \chi_t$$
$$+ 2m\tilde{F}_2 \chi^+_{t'} \frac{i(\vec{p}\,'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{4m^2} \chi_t$$

Aby uzyskać wyrażenia na (zależne od pędu) operatory w przestrzeni spinu pojedynczego nukleonu, należy pominąć $\chi^+_{t'}$ i χ_t

$$j^0 \approx G_E \mathbb{1}$$
$$-(2G_M - G_E)\frac{(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}{8m^2}\mathbb{1}$$
$$+(2G_M - G_E)\, i \,\frac{(\vec{p}\,'\times\vec{p})\cdot\vec{\sigma}}{4m^2}$$

Zupełnie analogiczne rachunki dla $\vec{N}$ prowadzą do

$$\vec{N} \to \vec{j} = G_E \frac{\vec{p}+\vec{p}\,'}{2m}\mathbb{1} + \frac{i\vec{\sigma}\times(\vec{p}\,'-\vec{p})}{2m}$$

Dodatkowo należy pamiętać
o argumentach formfaktorów

$$G_E = G_E(q^2)$$

$$G_M = G_M(q^2)$$

kwadrat przekazu czteropędu

$$q \equiv (\omega, \vec{Q})$$

przekaz czteropędu

przekaz energii

przekaz trójpędu

$$q^2 = \omega^2 - \vec{Q}^2$$

Konsekwentne zastosowanie redukcji nierelatywistycznej oznacza także zastąpienie q^2 przez $-\vec{Q}^2$ w argumentach G_E i G_M

W ten sposób mamy już kompletną definicję operatora prądu pojedynczego nukleonu dla (nierelatywistycznej) fizyki jądrowej.