Wykład 14 W2FT

rozpraszanie elastyczne elektron-deuteron

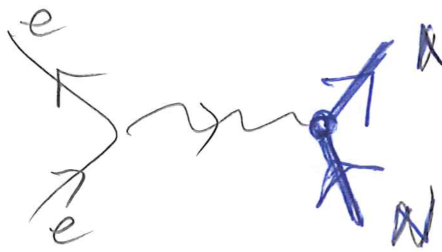
Rozpraszanie elastyczne

$e + d \to e' + d'$

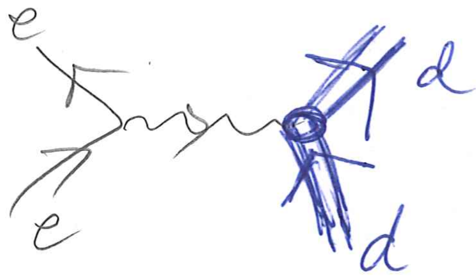
Przebyliśmy drogę

(1) $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$

(2) $e^- + N \to e^- + N$



$e^- + d \to e^- + d$



Czym jest "prawe ramię" w tym diagramie?

$$N^\alpha \equiv \langle \Psi_f \vec{P}_f | j^\alpha_{EM} | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$$

końcowy wewnętrzny stan jądrowy

końcowy całkowity pęd układu jądrowego

operator prądu elektromagnetycznego układu jądrowego

początkowy wewnętrzny stan jądrowy

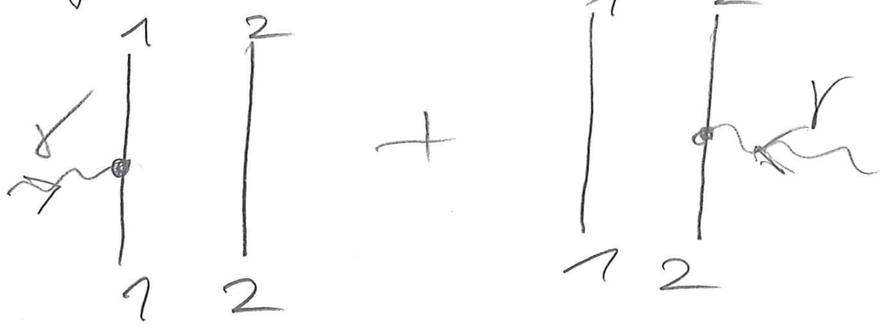
początkowy całkowity pęd układu jądrowego

Czym jest j^{α}_{EM} ?

Na pewno zawiera część odpowiadającą sumie prądów pojedynczych nukleonów.

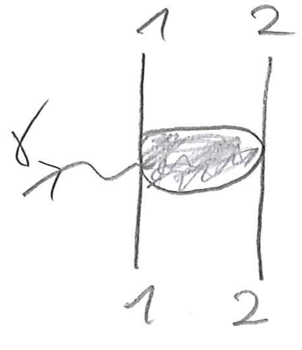
Dla układu z dwoma nukleonami (2N) mamy więc najpierw

$j(1) \quad + \quad j(2)$



Ale to nie wszystko!

W j^{α}_{EM} istnieją operatory dwunukleonowe (w ogólniejszym przypadku także trzy-, a nawet czteronukleonowe) odpowiadające procesom, w których foton jest absorbowany „przy współpracy" dwóch (lub większej liczby) nukleonów:

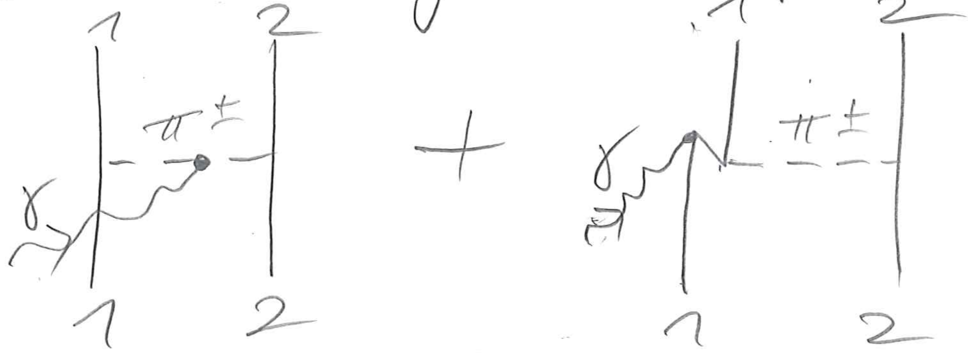


$j(1,2)$

Jest bardzo wiele modeli $j(1,2)$.
Ponieważ fundamentalnym oddziaływaniem między dwoma nukleonami jest wymiana pionu

, który może być naładowany,

więc w zasadzie każdy model $j(1,2)$ uwzględnia operator związany właśnie z wymianą pionu



"pion in flight"
pion w locie

seagull term
składnik typu "mewa"

W tzw. wersji chiralnej, zgodnej z wyrażeniem na potencjał wymiany jednego pionu z wcześniejszych wykładów elementy macierzowe tego operatora dane są następującym wzorem

$$\langle \vec{p}\,' \vec{P}_f | \vec{j}^{\,1\pi}(1,2) | \vec{p}\, \vec{P}_i \rangle =$$

Uwaga: $\vec{p}\,(\vec{p}\,')$ to początkowy (końcowy) pęd względny, $\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\left(\frac{\vec{p}_1\,'-\vec{p}_2\,'}{2}\right)$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\, i\left(\vec{\tau}(1)\times\vec{\tau}(2)\right)_z$$

$$\Bigg\{\left(\frac{g_A}{2F_\pi}\right)^2 \frac{\vec{\sigma}(2)\cdot\vec{q}_2}{m_\pi^2+\vec{q}_2^{\,2}}\,\vec{\sigma}(1)$$

$$-\left(\frac{g_A}{2F_\pi}\right)^2 \frac{\vec{\sigma}(1)\cdot\vec{q}_1}{m_\pi^2+\vec{q}_1^{\,2}}\,\vec{\sigma}(2)$$

$$+\left(\frac{g_A}{2F_\pi}\right)^2 \frac{\vec{\sigma}(1)\cdot\vec{q}_1}{m_\pi^2+\vec{q}_1^{\,2}}\,\frac{\vec{\sigma}(2)\cdot\vec{q}_2}{m_\pi^2+\vec{q}_2^{\,2}}\left(\vec{q}_1-\vec{q}_2\right)\Bigg\},$$

gdzie m_π to masa pionu

$g_A \simeq 1.27$ aksjalna stała sprzężenia πN

F_π – stała rozpadu pionu $\pi^\pm$

$$\vec{q}_1 = \vec{p}\,' - \vec{p} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{P}_f - \vec{P}_i\right)$$

$$\vec{q}_2 = \vec{p} - \vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}\left(\vec{P}_f - \vec{P}_i\right)$$

$$\left(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{P}_f - \vec{P}_i \equiv \vec{Q}\right)$$

Ten składnik należy uwzględnić w $\vec{j}^{\,\alpha}_{EM}$ oprócz $\vec{j}(1)+\vec{j}(2)$

Przypominam, że na poprzednim wykładzie wyprowadziliśmy wyrażenie na prąd pojedynczego nukleonu $j(i)$, który teraz możemy zapisać, rozróżniając między protonem a neutronem za pomocą izospinowych operatorów rzutowych

$$j^0(i) = \left[G_E^p \mathbb{1} - (2G_M^p - G_E^p) \frac{(\vec{p_i}' - \vec{p_i})^2}{8M^2} \mathbb{1} + (2G_M^p - G_E^p)\, i \frac{(\vec{p_i}' \times \vec{p_i}) \cdot \vec{\sigma}(i)}{4M^2} \right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{\tau}(i)_z\right)$$

$$+ \left[G_E^n \mathbb{1} - (2G_M^n - G_E^n) \frac{(\vec{p_i}' - \vec{p_i})^2}{8M^2} \mathbb{1} + (2G_M^n - G_E^n)\, i \frac{(\vec{p_i}' \times \vec{p_i}) \cdot \vec{\sigma}(i)}{4M^2} \right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \vec{\tau}(i)_z\right) \equiv g(\vec{p_i}', \vec{p_i})$$

element macierzowy w przestrzeni pędowej, operator w przestrzeni spinowej i izospinowej nukleonu nr i

$$\vec{j}(i) = \left[G_E^p \frac{\vec{p}_i{}' + \vec{p}_i}{2M} \mathbb{1} + G_M^p \frac{i\vec{\sigma}(i) \times (\vec{p}_i{}' - \vec{p}_i)}{2M} \right] \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{\tau}(i)_z\right)$$

$$+ \left[G_E^n \frac{\vec{p}_i{}' + \vec{p}_i}{2M} \mathbb{1} + G_M^n \frac{i\vec{\sigma}(i) \times (\vec{p}_i{}' - \vec{p}_i)}{2M} \right] \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \vec{\tau}(i)_z\right) \equiv g(\vec{p}_i{}', \vec{p}_i)$$

Tutaj $\vec{p}_i$ $(\vec{p}_i{}')$ jest początkowym (końcowym) pędem nukleonu nr i.

Jak liczyć (w reprezentacji pędowej) te kluczowe elementy macierzowe

$$N^\alpha = \langle \Psi_f \vec{P}_f \,|\, j_{EM} \,|\, \Psi_i \vec{P}_i \rangle \;?$$

W zasadzie odpowiednie wyrażenie dla $j(1,2)$ możemy zapisać od razu

$$N^\alpha(1,2) = \langle \Psi_f \vec{P}_f \,|\, j(1,2) \,|\, \Psi_i \vec{P}_i \rangle =$$

$$= \int d\vec{p}\,' \int d\vec{p} \, \langle \Psi_f | \vec{p}\,' \rangle \langle \vec{p}\,' \vec{P}_f | j(1,2) | \vec{p} \vec{P}_i \rangle \langle \vec{p} | \Psi_i \rangle$$

Tylko tyle! Przypominam, że

$\langle \vec{p} \,|\, \Psi_i \rangle$ i $\langle \vec{p}' \,|\, \Psi_f \rangle$ są wciąż

stanami w przestrzeni spinowej i izospinowej, a pędowy element macierzowy

$$\langle \vec{p}' \vec{\mathcal{P}}_f \,|\, j(1,2) \,|\, \vec{p}\, \vec{\mathcal{P}}_i \rangle$$

jest operatorem w przestrzeni spinowej i izospinowej dwóch nukleonów.

Należy pamiętać, że skorzystaliśmy z ważnego faktu: w przybliżeniu nierelatywistycznym energia potencjalna oddziaływania dwóch nukleonów nie zależy w ogóle od pędu całkowitego układu (niezmienniczość Galileusza). Zachodzi więc

$$\langle \underbrace{\vec{p}_1 \vec{p}_2}_{\text{pędy indywidualnych nukleonów}} \,|\, \Psi \underbrace{\vec{\mathcal{P}}}_{\text{pęd całkowity układu}} \rangle = \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{\mathcal{P}}) \underbrace{\langle \vec{p} \,|\, \Psi \rangle}_{\text{nie zależy od } \vec{\mathcal{P}}}\,,$$

$$\vec{p} \equiv \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}$$

Wyrażenia na $N^\alpha(1,2)$ jest szczególnie proste jeśli mamy tzw. trójwymiarową reprezentację wewnętrznej funkcji układu jądrowego. U nas dla deuteronu byłoby to $\langle \vec{p} | \Psi \rangle$. Przypominam, że deuteron wprowadziliśmy w reprezentacji fal parcjalnych:

$$|\Psi_d \, 1 m_d ; 00\rangle = \int_0^\infty dp\, p^2 \sum_{l=0,2} \varphi_l(p) \, |p \alpha_l\rangle ,$$

gdzie $|p\alpha_l\rangle = |p\,(l\,1)\,1\, m_d ; 0\,0\rangle$

spin

całkowity moment pędu

rzut całkowitego momentu pędu

całkowity izospin

rzut całk. izospinu

Jaka postać jest jak najbardziej poprawna, ale wyrażenia na $N^\alpha(1,2)$ oraz $N^\alpha(i)$, $i=1,2$ są skomplikowane. Czy istnieje trójwymiarowa postać deuteronu? TAK!

Trójwymiarowa postać deuteronu
(zwana także postacią operatorową)

$$\langle \vec{p} \,|\, \Psi_d\, m_d \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(|\vec{p}\,|)\, b_i(\vec{p}, \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2))\, \underbrace{|1 m_d\rangle}_{\text{stan spinowy 2N}} \underbrace{|00\rangle}_{\text{stan izospinowy 2N}}$$

$$b_1 = \mathbb{1}$$

$$b_2 = \vec{p}\cdot\vec{\sigma}(1)\, \vec{p}\cdot\vec{\sigma}(2) - \frac{1}{3}\vec{p}^{\,2}\, \mathbb{1}$$

b_1, b_2 to operatory w przestrzeni spinowej dwóch nukleonów.

Dla jasności stan spinowy $|1 m_d\rangle$ jest nam dobrze znany

$$|1 m_d\rangle \equiv |(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}) 1 m_d\rangle =$$

$$= \sum_{m_1, m_2} c(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}1; m_1, m_2, m_d)\, |\tfrac{1}{2} m_1\rangle |\tfrac{1}{2} m_2\rangle .$$

Podobnie stan izospinowy $|00\rangle$

$$|00\rangle \equiv |(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}) 00\rangle =$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2} c(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}0; \nu_1, \nu_2, 0)\, |\tfrac{1}{2}\nu_1\rangle |\tfrac{1}{2}\nu_2\rangle$$

Można pokazać (ćwiczenia), że funkcje $\phi_1(p)$ i $\phi_2(p)$ są prosto związane z funkcjami $\varphi_0(p)$ i $\varphi_2(p)$ z reprezentacji fal parcjalnych:

$$\phi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\varphi_0(p)$$

$$\phi_2(p) = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}\,p^2}\,\varphi_2(p)$$

Wypadałoby także pokazać, że postać operatorowa $\langle \vec{p} \,|\, \Psi_d^{m_d} \rangle$ rzeczywiście odpowiada układowi dwóch nukleonów z całkowitym momentem pędu 1, rzutem momentu pędu m_d i spinem 1 (ćwiczenia).

Mając do dyspozycji $\langle \vec{p} \,|\, \Psi_d \rangle$, możemy teraz zająć się elementami macierzowymi operatorów prądów poszczególnych nukleonów, $N^\alpha(1)$ oraz $N^\alpha(2)$.

2N

$$\langle \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' | j(1) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \delta^3(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2)\, g(\vec{p}_1{}', \vec{p}_1)$$

$$\langle \vec{p}\,' \vec{\mathcal{P}}\,' | \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' \rangle \langle \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' | j(2) | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}\, \vec{\mathcal{P}} \rangle =$$

$$= \int d\vec{p}_1{}' d\vec{p}_2{}' d\vec{p}_1 d\vec{p}_2\; \delta^3\left(\vec{p}\,' - \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}')\right) \delta^3\left(\vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}'\right)$$
$$\delta^3(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2)\, g(\vec{p}_1{}', \vec{p}_1)\, \delta^3\left(\vec{p} - \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\right) \delta^3\left(\vec{\mathcal{P}} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2\right)$$

całka po $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = \vec{\mathcal{P}} - \vec{p}_2$

$$= \int d\vec{p}_1{}' d\vec{p}_2{}' d\vec{p}_2\; \delta^3\left(\vec{p}\,' - \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}')\right) \delta^3\left(\vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}'\right)$$
$$\delta^3(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2)\, g(\vec{p}_1{}', \vec{\mathcal{P}} - \vec{p}_2)\, \delta^3\left(\vec{p} + \vec{p}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\right)$$

całka po $\vec{p}_2$: $\vec{p}_2 = \vec{p}_2{}'$

$$= \int d\vec{p}_1{}' d\vec{p}_2{}'\; \delta^3\left(\vec{p}\,' - \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}')\right) \delta^3\left(\vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}'\right)$$
$$g(\vec{p}_1{}', \vec{\mathcal{P}} - \vec{p}_2{}')\, \delta^3\left(\vec{p} + \vec{p}_2{}' - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\right)$$

całka po $\vec{p}_2{}'$: $\vec{p}_2{}' = \vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}_1{}'$

$$= \int d\vec{p}_1{}'\; \delta^3\left(\vec{p}\,' - \vec{p}_1{}' + \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,'\right) g(\vec{p}_1{}', \vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}\,' + \vec{p}_1{}')$$
$$\delta^3\left(\vec{p} + \vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}_1{}' - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\right)$$

całka po $\vec{p}_1{}'$: $\vec{p}_1{}' = \vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,'$

$$= g\left(\vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,';\ \vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}\,' + \vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,'\right)$$
$$\delta^3\left(\vec{p} + \vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{p}\,' - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,' - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\right)$$

$$= g\left(\vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,', \vec{p}\,' + \vec{\mathcal{P}} - \tfrac{1}{2}\vec{\mathcal{P}}\,'\right)$$
$$\delta^3\left(\vec{p} - \vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}(\vec{\mathcal{P}}\,' - \vec{\mathcal{P}})\right)$$

$$\langle \Psi_f \vec{P}_f | j(1) | \Psi_i \vec{P}_i \rangle =$$

$$= \int d\vec{p}\,' d\vec{P}\,' d\vec{p}\, d\vec{P}$$

$$\langle \Psi_f \vec{P}_f | \vec{p}\,' \vec{P}\,' \rangle \langle \vec{p}\,' \vec{P}\,' | j(1) | \vec{p}\, \vec{P} \rangle$$

$$\langle \vec{p}\, \vec{P} | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$$

$$= \int d\vec{p}\,' d\vec{p}\, \langle \Psi_f | \vec{p}\,' \rangle \langle \vec{p}\,' \vec{P}_f | j(1) | \vec{p}\, \vec{P}_i \rangle \langle \vec{p} | \Psi_i \rangle$$

$$= \int d\vec{p}\,' \underline{d\vec{p}} \langle \Psi_f | \vec{p}\,' \rangle g\left(\vec{p}\,' + \tfrac{1}{2} \vec{P}_f , \vec{p}\,' + \vec{P}_i - \tfrac{1}{2} \vec{P}_f\right)$$

$$\delta^3\left(\vec{p} - \vec{p}\,' + \tfrac{1}{2}(\vec{P}_f - \vec{P}_i)\right) \langle \vec{p} | \Psi_i \rangle$$

całka po $\vec{p}$: $\vec{p} = \vec{p}\,' - \frac{1}{2}(\vec{P}_f - \vec{P}_i)$

$$= \int d\vec{p}\,' \langle \Psi_f | \vec{p}\,' \rangle g\left(\vec{p}\,' + \tfrac{1}{2} \vec{P}_f ; \vec{p}\,' + \vec{P}_i - \tfrac{1}{2} \vec{P}_f\right)$$

$$\langle \vec{p}\,' - \tfrac{1}{2}(\vec{P}_f - \vec{P}_i) | \Psi_i \rangle$$

zmieniam oznaczenie : $\vec{p}\,' : \vec{p}\,' \to \vec{p}$

$$= \int d\vec{p} \langle \Psi_f | \vec{p} \rangle g\left(\vec{p} + \tfrac{1}{2} \vec{P}_f ; \vec{p} + \vec{P}_i - \tfrac{1}{2} \vec{P}_f\right)$$

$$\langle \vec{p} - \tfrac{1}{2}(\vec{P}_f - \vec{P}_i) | \Psi_i \rangle$$

W tym wyrażeniu $g(\vec{p}_1\,', \vec{p}_1)$ jest wciąż operatorem w przestrzeni spinu i izospinu nukleonu nr 1.

Czy musimy liczyć $N^{\alpha}(2)$?
(Co byłoby dla ^{238}U ?)
Na szczęście nie, jeśli stany $|\Psi_i\rangle$ i $|\Psi_f\rangle$ są odpowiednio antysymetryczne przy zamianie cząstek. Wówczas

$$\langle \Psi_f | j(2) | \Psi_i \rangle =$$

$$\langle \Psi_f | P_{12} j(1) P_{12} | \Psi_i \rangle =$$

$$= (-1)(-1) \langle \Psi_f | j(1) | \Psi_i \rangle =$$

$$\langle \Psi_f | j(1) | \Psi_i \rangle$$

Dlatego dla układu 2N

$$\langle \Psi_f \vec{P}_f | j^{\alpha}_{EM} | \Psi_i \vec{P}_i \rangle =$$

$$= \langle \Psi_f \vec{P}_f | j^{\alpha}(1,2) | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$$

$$+ 2 \langle \Psi_f \vec{P}_f | j^{\alpha}(1) | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$$

Dla rozpraszania $e + d \to e' + d'$

$\langle \Psi_f \vec{P}_f | j(1) | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$ przybiera postać

$$\langle \Psi_d m_d' \vec{P}_f | j(1) | \Psi_d m_d \vec{P}_i \rangle =$$

$$= \int d^3\vec{p} \, \langle \Psi_d m_d' | \vec{p} \rangle \, g(\vec{p} + \tfrac{1}{2}\vec{P}_f, \vec{p} + \vec{P}_i - \tfrac{1}{2}\vec{P}_f)$$

$$\langle \vec{p} - \tfrac{1}{2}(\vec{P}_f - \vec{P}_i) | \Psi_d m_d \rangle, \text{ gdzie}$$

$g(\vec{p}_1', \vec{p}_1)$ są zdefiniowane na stronach 5 i 6.

Korzystając z postaci operatorowej, w układzie laboratoryjnym ($\vec{P}_i = 0$, $\vec{Q} = \vec{P}_f$) dostajemy

$$\langle \Psi_d m_d' \vec{P}_f = \vec{Q} | j(1) | \Psi_d m_d \vec{P}_i = 0 \rangle =$$

$$= \int d^3\vec{p} \sum_k \langle 00 | \langle 1 m_d' | b_k(\vec{p}) \, g(\vec{p} + \tfrac{1}{2}\vec{Q}, \vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q})$$

$$\phi_k(p) \sum_j \phi_j(|\vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q}|) \, b_j(\vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q}) | 1 m_d \rangle | 00 \rangle$$

$$= \int d^3\vec{p} \sum_k \phi_k(p) \sum_j \phi_j(|\vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q}|)$$

$$\underbrace{\langle 00 | \langle 1 m_d' | b_k(\vec{p}) \, g(\vec{p} + \tfrac{1}{2}\vec{Q}, \vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q}) \, b_j(\vec{p} - \tfrac{1}{2}\vec{Q}) | 1 m_d \rangle | 00 \rangle}_{\text{to można policzyć dokładnie (Mathematica)}}$$

weźmy pierwszą część $j^0(1)$ ze strony 5

$$j^0(1) = G_E^p \mathbb{1} \otimes \pi^p + G_E^n \mathbb{1} \otimes \pi^n$$

$$\pi^p = \frac{1}{2}(1+\tau_3)\,, \quad \pi^n = \frac{1}{2}(1-\tau_3)$$

Teraz w przestrzeni dwunukleonowej

$$g\left(\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{Q}, \vec{p}-\frac{1}{2}\vec{Q}\right) \longrightarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{\left(G_E^p \underset{N_1}{\mathbb{1}} \otimes \underset{N_2}{\mathbb{1}}\right)}_{\text{przestrzeń spinowa}} \otimes \underbrace{\left(\underset{N_1}{\pi^p} \otimes \underset{N_2}{\mathbb{1}}\right)}_{\text{przestrzeń izospinowa}}}_{\text{macierz } 16\times 16} + \underbrace{\underbrace{G_E^n \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}_{\text{przestrzeń spinowa}} \otimes \underbrace{\left(\pi^n \otimes \mathbb{1}\right)}_{\text{przestrzeń izospinowa}}}_{\text{macierz } 16\times 16}$$

$$b_1(\vec{p}) = \underset{\text{spin}}{\mathbb{1}^{2N}} \otimes \underset{\text{izospin}}{\mathbb{1}^{2N}}$$

$$b_2(\vec{p}) = \underbrace{\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}(1) \otimes \vec{p}\cdot\vec{\sigma}(2) - \frac{1}{3}\vec{p}^2 \mathbb{1}^{2N}\right)}_{\text{spin}} \otimes \underbrace{\mathbb{1}^{2N}}_{\text{izospin}}$$

Znaczna część obliczeń dotyczących elementów macierzowych $\langle \Psi_f \vec{P}_f | j^{\alpha}_{EM} | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$ może być więc wykonana analitycznie dla układów z dwoma (ale także z trzema nukleonami).

Załóżmy więc, że mamy już obliczone $N^{\alpha} \equiv \langle \Psi_f \vec{P}_f | j^{\alpha}_{EM} | \Psi_i \vec{P}_i \rangle$.

Co dalej?

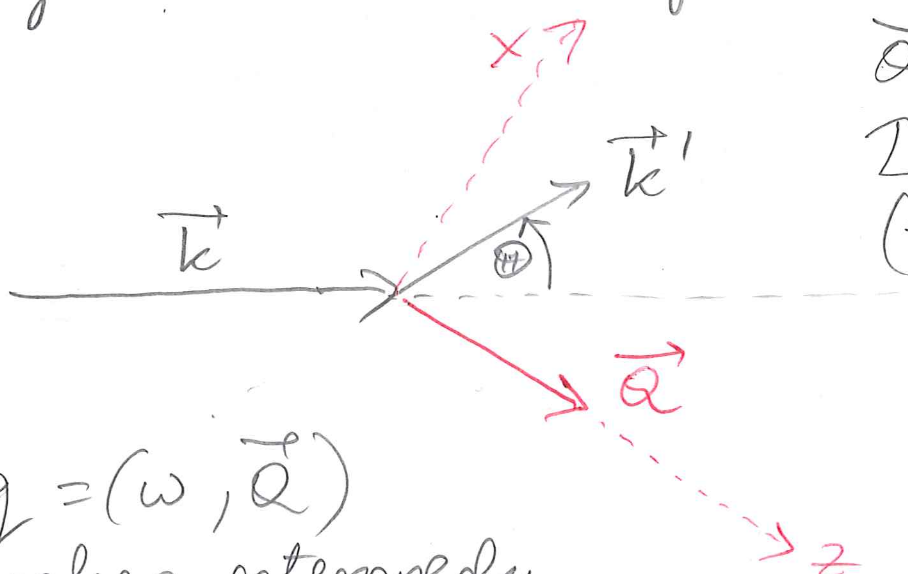
Potrzebujemy $|T|^2 \equiv |\underbrace{L_{\alpha}}_{\text{część elektronowa}} N^{\alpha}|^2$

$$|T|^2 = \underbrace{(L_{\alpha})^* L_{\beta}}_{\text{to już znamy analitycznie}} (N^{\alpha})^* N^{\beta}$$

to już znamy analitycznie;
najczęściej liczymy $\sum_{s'} (L_{\alpha})^* L_{\beta} \equiv L_{\alpha\beta}$

Kinematyka dwuciałowa dla $e + d \to e' + d'$ nie stanowi problemu; zwykle masa spoczynkowa elektronu jest zaniedbywana ($\to$ wzory jak dla efektu Comptona)

Wybór układu współrzędnych:



$\vec{Q} \equiv \vec{k} - \vec{k}' \parallel \hat{z}$

przekaz (trój)pędu

$q = (\omega, \vec{Q})$

przekaz czteropędu

$\omega = k - k'^0$
$\equiv E - E'$
$\approx |\vec{k}| - |\vec{k}'|$
$m_e \approx 0$

przekaz energii

Kluczowe założenie:
zachowanie prądu układu jądrowego
(absolutnie niebanalne do spełnienia; wymaga zgodności energii potencjalnej 2N z operatorem j^α_{EM})

$$(k-k')_\alpha N^\alpha = 0 \Rightarrow \omega N^0 = \vec{Q} \cdot \vec{N}$$

$$\vec{Q} = |\vec{Q}|\hat{z} \Rightarrow N_z = \frac{\omega}{|\vec{Q}|} N^0$$

Dlatego w wyrażeniach na przekrój czynny dla procesów rozpraszania elektronów nie występuje N_Z!

To był ostatni "kawałek układanki"

Jeśli początkowy elektron ma helicity h, to ogólny wzór na przekrój czynny ma postać

$$\sigma = \Sigma_1 + h\Delta, \quad h = \pm 1$$

$$\Sigma_1 = \sigma_{Mott}\, \rho \left(v_L R_L + v_T R_T + v_{TT} R_{TT} + v_{TL} R_{TL} \right)$$

$$\Delta = \sigma_{Mott}\, \rho \left(v_{T'} R_{T'} + v_{LT'} R_{LT'} \right)$$

σ_{Mott} – przekrój czynny Motta opisujący rozpraszanie elektronu na punktowej tarczy (K)

ρ – czynnik przestrzeni fazowej (K)

v_i – czynniki kinematyczne pochodzące z $L_{\alpha\beta}$ (K)

R_i – tzw. funkcje odpowiedzi (D)
("response functions")
wywodzące się z N^α

$$v_L = \frac{(q^2)^2}{|\vec{Q}|^4}, \quad v_T = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2} + \operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}$$

$$v_{TT} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2}, \quad v_{TL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2}\sqrt{-\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2} + \operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}}$$

$$v_{T'} = \sqrt{-\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2} + \operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}}\ \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$$

$$v_{TL'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q^2}{|\vec{Q}|^2}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$$

$$\sigma_{Mott} = \frac{\alpha^2\cos^2\frac{\Theta}{2}}{4E^2\sin^4\frac{\Theta}{2}}$$

$$R_L = |N^0|^2$$

$$R_T = |N_{+1}|^2 + |N_{-1}|^2$$

$$R_{TT} = 2\,\mathrm{Re}\left(N_{+1}N_{-1}^*\right)$$

$$R_{TL} = -2\,\mathrm{Re}\left(N^0(N_{+1} - N_{-1})^*\right)$$

$$R_{T'} = |N_{+1}|^2 - |N_{-1}|^2$$

$$R_{TL'} = -2\,\mathrm{Re}\left(N^0(N_{+1} + N_{-1})^*\right)$$

Uwaga:

$N_{\pm 1}$ to składowe sferyczne $\vec{N}$:

$$N_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(N_x + iN_y)$$

$$N_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_x + iN_y)$$

w N^0, N_{+1}, N_{-1} magnetyczne liczby kwantowe w stanie początkowym (m_i) i końcowym (m_f) są określone.

Oprócz przekroju czynnego, można rozważać inne wielkości, na przykład zależną od polaryzacji początkowego jądra asymetrię względem helicity początkowego elektronu

$$A(m_i) = \frac{\sum_{m_f} \Delta(m_i, m_f)}{\sum_{m_f} \sum (m_i, m_f)},$$

która jest określana dla konkretnej kinematyki elektronu (E, Θ, E').

Co dalej? Bardzo wiele możliwości!

$e + d \to e' + d'$

prądy neutralne

$\nu + d \to \nu' + d'$

$e + d \to e' + p + n$

$e + {}^3He \to \ldots$

$e + {}^3H \to \ldots$

prądy neutralne i naładowane

$\nu + d \to \nu' + N + N$

$\gamma + d \to p + n$

$\gamma + {}^3He \to \ldots$

$\gamma + {}^3H \to \ldots$

${}^3H \to {}^3He + e + \bar{\nu}_e$

$\pi^- + d \to n + n$

$\pi^- + {}^3He \to \ldots$

$\pi^- + {}^3H \to \ldots$

$\mu^- + d \to \nu_\mu + n + n$

$\mu^- + {}^3He \to \nu_\mu + \ldots$

$\mu^- + {}^3H \to \nu_\mu + \ldots$

$\pi^- + d \to n + n + \gamma$

$\pi^- + {}^3He \to \gamma + \ldots$

$\pi^- + {}^3H \to \gamma + \ldots$