Zad. 11

Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $\langle 0,1)$ z działaniem określonym wzorem

$$a \circ b = a + b - [a+b],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, stanowi grupę

Dowód:

- $G0: \forall a,b \in G \quad a \circ b \in G$

$a \in \langle 0,1)$, $b \in \langle 0,1)$

Zachodzi albo $0 \leq a+b < 1$, więc $a \circ b = a+b \in \langle 1,0)$, albo

$1 \leq a+b < 2$, więc $a \circ b = a+b-1 \in \langle 0,1)$

- $G1: \forall a,b,c \in G \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

$L = a + (b+c-[b+c]) - [a+b+c-[b+c]]$

$= a+b+c-[b+c]-[a+b+c]+[b+c]$

$= a+b+c-[a+b+c]$

Wykorzystaliśmy własność części całkowitej $[k+x] = k+[x]$, dla dowolnej liczby całkowitej k (w danym przypadku $[b+c]$)

$P = (a+b-[a+b])+c-[a+b-[a+b]+c]$

$= a+b+c-[a+b]-[a+b+c]+[a+b]$

$= a+b+c-[a+b+c] = L,$

więc działanie jest łączne

- $G2: \exists e \in G: a \circ e = e \circ a = a$

$e = 0$

Jeśli $a \in \langle 0, 1)$, to $a+e-[a+e] =$

$= a - 0 = a$

- $G3: \forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G: aa^{-1} = a^{-1}a = e$

$a^{-1} = 1-a$

$a^{-1} \circ a = 1-a+a-[1-a+a] =$

$= 1-[1] = 1-1 = 0 = e$

Grupa jest oczywiście przemienna

$a \circ b = a+b-[a+b] = b+a-[b+a]$

$= b \circ a$