Zestaw 1

1. Zaproponować działanie, które
   (a) nie jest ani przemienne, ani łączne,
   (b) jest przemienne, ale nie jest łączne,
   (c) jest łączne, ale nie jest przemienne.

2. Czy aksjomaty grupy można nieco osłabić i zażądać istnienia jedynie *prawostronnego* elementu neutralnego (*prawostronnej* jedynki) i *prawostronnego* elementu odwrotnego ?

3. I podobnie: Czy w aksjomatach grupy wystarczy zażądać istnienia jedynie *lewostronnego* elementu neutralnego (*lewostronnej* jedynki) i *lewostronnego* elementu odwrotnego ?

4. Wykazać, że w grupie jest tylko jeden element neutralny.

5. Wykazać, że każdy element grupy ma tylko jeden element odwrotny.

6. Pokazać, że dla dowolnego elementu g grupy zachodzi: $(g^{-1})^{-1} = g$.

7. Pokaż, że dla dwóch dowolnych elementów grupy g_a i g_b zachodzi: $(g_a g_b)^{-1} = g_b^{-1} g_a^{-1}$.

8. Pokazać, że dowolna grupa rzędu 3 o elementach a, b, e jest cykliczna. (e jest elementem neutralnym grupy.) Zbudować dla tej grupy tabelkę mnożenia grupowego.

9. Pokazać, że grupa rzędu 4 o elementach a, b, c, e jest cykliczna lub, jeżeli nie jest cykliczna, to abelowa. Dla obu przypadków (grupy cyklicznej i niecyklicznej) znaleźć tabelkę mnożenia grupy. (e jest elementem neutralnym grupy.)

10. Czy następujące zbiory z podanym działaniem stanowią grupę ?
    (a) $\mathcal{R} \setminus \{0\}$, $a \circ b = -2a\,b$,
    (b) $\mathcal{R}_+ \equiv (0, \infty)$, $a \circ b = \sqrt{a\,b}$,
    (c) $(2, \infty)$, $a \circ b = a\,b - 2a - 2b + 6$.

11. $G = [0, 1)$. Działanie w zbiorze G określamy następująco

    $$a * b = a + b - [a + b]\,,$$

    gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Sprawdzić, czy G jest grupą z tak określonym działaniem.

12. Niech G będzie zbiorem macierzy 2×2 z elementami całkowitymi i niezerowym wyznacznikiem. Sprawdzić, czy G stanowi grupę z działaniem mnożenia macierzowego.

13. Niech $(G, *)$ będzie grupą oraz $a \in G$. Udowodnić twierdzenie: $a * a = a \Rightarrow a = e$.

14. Sprawdzić, czy każde działanie łączne określone na zbiorze dwuelementowym jest przemienne.

15. G jest grupą oraz e jest elementem neutralnym grupy G. Udowodnić (a) jeśli $a, b \in G$, to zachodzi $a = b \Leftrightarrow ab^{-1} = e$, (b) G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in G$ zachodzi $aba^{-1}b^{-1} = e$.

16. Sprawdzić, czy prawdziwe jest twierdzenie: jeśli G jest grupą oraz $a, b \in G$ i $n \in \mathbb{Z}$, to zachodzi $(ab)^n = a^n b^n$.

17. Udowodnić, że zbiór liczb zespolonych $G = \{1, i, -1, -i\}$ stanowi grupę z działaniem mnożenia liczb zespolonych. Zbudować dla tej grupy tabelkę mnożenia grupowego. (i jest oczywiście jednostką urojoną.)

18. Udowodnić, że zbiór macierzy

$$G = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

stanowi grupę z działaniem mnożenia macierzowego. Zbudować dla tej grupy tabelkę mnożenia grupowego.

19. Udowodnić, że zbiór macierzy

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & g_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ g_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & g_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \end{array} \right\}$$

stanowi grupę z działaniem mnożenia macierzowego. Zbudować dla tej grupy tabelkę mnożenia grupowego.

20. Udowodnić, że zbiór funkcji zespolonych

$$G = \left\{ \begin{array}{llll} g_1 : z \to z, & g_2 : z \to iz, & g_3 : z \to -z, & g_4 : z \to -iz, \\ g_5 : z \to \bar{z}, & g_6 : z \to -\bar{z}, & g_7 : z \to i\bar{z}, & g_8 : z \to -i\bar{z} \end{array} \right\}$$

stanowi grupę z działaniem składania funkcji. ($\bar{z}$ oznacza sprzężenie zespolone liczby z.) Zbudować dla tej grupy tabelkę mnożenia grupowego.

21. Sprawdzić, czy grupa z działaniem mnożenia macierzowego zawierająca macierze

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

stanowi grupę skończoną, skoro zachodzi (sprawdzić !) $a^4 = e$ oraz $b^3 = e$.

22. Tabela przedstawia wyniki „mnożenia $*$" w zbiorze $G = \{e, a, b, c, d, f\}$.

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	d	f	b
b	b	f	e	a	c	d
c	c	d	f	e	b	a
d	d	b	a	f	e	c
f	f	c	d	b	a	e

Sprawdzić, czy tabela jest tabelą mnożenia *grupowego*.