Zestaw 2

1. Odpowiedzieć na pytania:
(a) Czy każda grupa macierzy 2×2 ze standardowym działaniem mnożenia macierzowego musi zawierać macierz $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
(b) Czy każda grupa macierzy 2×2 ze standardowym działaniem mnożenia macierzowego musi być nieabelowa ?
(c) Czy każda grupa macierzy 2×2 ze standardowym działaniem mnożenia macierzowego musi obejmować wyłącznie macierze nieosobliwe (o wyznaczniku różnym od zera) ?

2. Wyszukać kontrprzykład do twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Lagrange'a.

3. Znaleźć kilka nietrywialnych przykładów homomorfizmów.

4. Centrum grupy G to zbiór $Z = \{z \in G : \forall g \in G \; z.g = g.z\}$. Wykazać, że (a) Z jest podgrupą abelową G, (b) Z jest podgrupą normalną G.

5. Grupę kwaternionów, oznaczaną symbolem Q_8 można potraktować jako grupę macierzową (z działaniem mnożenia macierzowego) generowaną przez macierze $a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sprawdzić (najwygodniej w notatniku programu *Mathematica*®), że
$$a^4 = e, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^3, ba = a^3 b\,,$$
co oznacza, że Q_8 można zadać w następujący sposób:
$$Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}\,.$$

6. Znaleźć centrum Q_8.

7. Wykazać, że odwzorowanie w grupie G, $f : G \to G$, zdefiniowane przez $f(g) = g^{-1}$, jest automorfizmem, jeśli G jest abelowa.

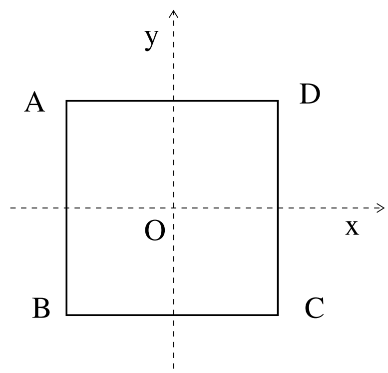
8. Wykazać, że odwzorowanie $i_a : G \to G, a \in G, i_a(x) = axa^{-1}$ jest automorfizmem (nazywamy je automorfizmem wewnętrznym grupy G).

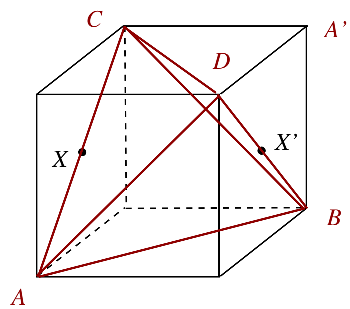
9. Zbiór wszystkich automorfizmów wewnętrznych oznaczamy $Inn(G)$. Wykazać, że $Inn(G)$ stanowi grupę izomorficzną z grupą G/Z, gdzie Z jest centrum G.

10. Wykazać, że jeśli H jest podgrupą G oraz $|H| = \frac{1}{2}|G|$ (H zawiera połowę elementów G), to H jest podgrupą normalną G.

11. Dla grupy D_4, generowanej przez elementy b i c, dla których zachodzi: $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$, znaleźć:
(a) wszystkie elementy grupy,
(b) centrum grupy Z,

(c) klasy sprzężenia,
(d) element odwrotny do bc^2.
Pokazać, że $c^2b = bc^2$ oraz $c^3b = bc$.
Wskazówka: Grupa D_4 ma prostą interpretację geometryczną: jest to grupa przekształceń pozostawiająca niezmienionym kwadrat $ABCD$ (rysunek), przy czym c jest obrotem o kąt $\pi/2$ wokół osi prostopadłej do kwadratu i przechodzącej przez jego środek (czyli obrotem wokół osi z), a b jest obrotem o kąt π wokół osi x.





12. Grupa T jest grupą obrotów zachowujących w niezmienionej postaci regularny czworościan $ABCD$, który można wpisać w sześcian (rysunek). Ta grupa jest generowana przez elementy b i c, dla których zachodzi: $c^3 = b^2 = (bc)^3 = e$, gdzie b jest obrotem o kąt π wokół osi XX', a c jest obrotem o kąt $\frac{2}{3}\pi$ wokół przekątnej sześcianu AA'.
Znaleźć:
(a) wszystkie elementy grupy,
(b) centrum grupy Z,
(c) klasy sprzężenia,
(d) element odwrotny do bc^2bc.
Pokazać, że $c^2bc^2 = bcb$ oraz $c^3b = bc$.

13. Niech $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$, $\quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Wykazać, że H jest podgrupą normalną w grupie G z działaniem mnożenia macierzowego.

14. Grupa G jest iloczynem prostym podgrup H_1 i H_2 ($G = H_1 \times H_2$), jeśli

    (a) $G = H_1 H_2$,
    (b) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$,
    (c) każdy element z H_1 komutuje z każdym elementem H_2 .

    Wykazać, że grupa C_6 jest iloczynem prostym grup C_3 i C_2: $C_6 = C_3 \times C_2$.