Zestaw 3

1. Złożeniem operatorów liniowych $\hat{A}$ i $\hat{B}$ w przestrzeni liniowej V nazywamy operator $\widehat{AB}$ zdefiniowany wzorem ($\boldsymbol{x}$ jest dowolnym wektorem z V) $\widehat{AB}\,\boldsymbol{x} = \hat{A}\left(\hat{B}\,\boldsymbol{x}\right)$.

   W tej samej bazie $\{\boldsymbol{e_i}\}$ wyrazić elementy macierzowe operatora $\widehat{AB}$ przez elementy macierzowe operatorów $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

2. Operator $\hat{A}$ jest określony w przestrzeni liniowej V wektorów $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ wzorem $\hat{A}\,\boldsymbol{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Znaleźć elementy macierzowe operatora $\hat{A}$ w bazie $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Czy operator $\hat{A}$ jest nieosobliwy, to znaczy czy zachodzi $\hat{A}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

3. Operator $\hat{B}$ jest określony w przestrzeni liniowej V wektorów $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ wzorem $\hat{B}\,\boldsymbol{x} = (2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3)\,\boldsymbol{y}$, gdzie $\boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest ustalonym wektorem. Znaleźć elementy macierzowe operatora $\hat{B}$ w bazie $\boldsymbol{f_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Następnie przetransformować elementy macierzowe operatora $\hat{B}$ do nowej bazy $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Zbudować bazę ortonormalną $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, przyjmując zwykłą postać iloczynu skalarnego $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}$ i biorąc za punkt wyjścia trzy liniowo niezależne wektory $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Pokazać, że macierze

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

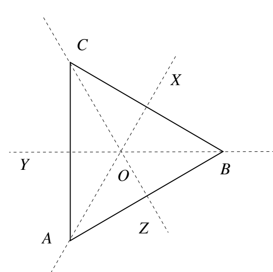
stanowią reprezentację grupy C_3.

6. Rozważając transformacje wersorów osi pod działaniem obrotów z grupy D_3 znaleźć:
(1) jednowymiarową reprezentację D_3 (rozpatrzeć działanie w przestrzeni rozpiętej na wersorze $\hat{z}$)
(2) dwuwymiarową reprezentację D_3 (rozpatrzeć działanie w przestrzeni rozpiętej na wersorach $\hat{x}$ i $\hat{y}$)
(3) trójwymiarową reprezentację D_3 (rozpatrzeć działanie w przestrzeni rozpiętej na wersorach $\hat{x}$, $\hat{y}$ i $\hat{z}$)

7. Pokazać, że iloczyn $g_a g_b$ transformacji na wektorze $\vec{r}$ indukuje iloczyn $T(g_a)T(g_b)$ operatorów na przestrzeni funkcji, generowanych przez transformację zmiennych: $f'(\vec{r}) = T(g)f(\vec{r}) \equiv f(g^{-1}\vec{r})$.

8. Utworzyć sześciowymiarową reprezentację grupy D_3 rozpatrując działanie jej elementów w przestrzeni funkcji napiętych na bazie:
$\psi_1 = x^2 = (\hat{x}, \overrightarrow{r})^2$,
$\psi_2 = y^2 = (\hat{y}, \overrightarrow{r})^2$,
$\psi_3 = z^2 = (\hat{z}, \overrightarrow{r})^2$,
$\psi_4 = yz = (\hat{y}, \overrightarrow{r})(\hat{z}, \overrightarrow{r})$,
$\psi_5 = zx = (\hat{z}, \overrightarrow{r})(\hat{x}, \overrightarrow{r})$,
$\psi_6 = xy = (\hat{x}, \overrightarrow{r})(\hat{y}, \overrightarrow{r})$.
Elementami przestrzeni liniowej L są kombinacje liniowe
$\psi(\overrightarrow{r}) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4yz + c_5zx + c_6xy$ (c_i zespolone).

Dla przypomnienia: grupa D_3 generowana jest przez elementy b i c, dla których zachodzi: $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$. Jest to grupa przekształceń pozostawiająca niezmienionym trójkąt równoboczny ABC (rysunek), przy czym c jest obrotem o kąt $2\pi/3$ wokół osi prostopadłej do trójkąta i przechodzącej przez jego środek O, a b jest obrotem o kąt π wokół osi OX.



W zestawie wykorzystałem zadania ze skryptu uczelnianego UJ nr 576 H. Arodzia i K. Rościszewskiego *Zbiór Zadań z Algebry i Geometrii Analitycznej dla Fizyków*, Kraków, 1988.