Zestaw 4

1. Dana jest normalna podgrupa N grupy G oraz reprezentacja $D^{G/N}$ grupy ilorazowej G/N. Pokazać, że reprezentacja $D^{G/N}$ może być "podniesiona" do reprezentacji D^G grupy G za pomocą definicji

$$D^G(g) := D^{G/N}(gN)\,.$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d] \arrow[dr, "D"] & \\ G/N \arrow[r, "D^{G/N}"'] & GL(n,C) \end{tikzcd}$$

2. Pokazać, że jeśli $D(g)$ jest nieredukowalną reprezentacją grupy G (w sensie grupy macierzy), to reprezentacją grupy G jest także grupa macierzy $D^*(g)$. Reprezentacje $D^*(g)$ i $D(g)$ mogą być równoważne lub nierównoważne. Udowodnić ponadto, że jeśli reprezentacje $D^*(g)$ i $D(g)$ są równoważne, tzn. $\exists C\ \forall g \in G :\ D^*(g) = C^{-1}\, D(g)\, C$, to macierz CC^* jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej.

3. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy D_4 i zbudować dla niej tabelę charakterów. Przy pomocy tej tabeli dokonać redukcji reprezentacji działającej w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej.

4. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy kwaternionów rozważanej w drugim zestawie zadań i zbudować dla niej tabelę charakterów. Porównać tabele charakterów grupy D_4 i grupy kwaternionów.

5. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy D_6 i zbudować dla niej tabelę charakterów. Przy pomocy tej tabeli dokonać redukcji reprezentacji działającej w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej.

6. Eksponentą macierzy zespolonej A o wymiarze $n \times n$ jest macierz oznaczona jako e^A lub $\exp(A)$ wyrażona przez szereg potęgowy:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k\,.$$

Udowodnić przy pomocy iloczynu Cauchy'ego szeregów, że dla *dowolnej* macierzy A o wymiarze $n \times n$ zachodzi $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$. Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ jest szereg $\sum c_n$, gdzie

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\,.$$

7. Pokazać, że $\left(e^{A}\right)^{*} = e^{A^{*}}$, $\left(e^{A}\right)^{T} = e^{A^{T}}$, $\left(e^{A}\right)^{\dagger} = e^{A^{\dagger}}$.

8. Pokazać, że e^{iH} jest macierzą unitarną, jeśli macierz H jest hermitowska tzn. $A^{\dagger} = A$.

9. Pokazać, że e^{A} jest macierzą ortogonalną, jeśli macierz A jest antysymetryczna tzn. $A^{T} = -A$.

10. Ograniczając się do macierzy diagonalizowalnych A o wymiarze $n \times n$, pokazać, że $\det\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}$, gdzie $\det(\mathrm{B})$ oznacza wyznacznik macierzy B, a $\mathrm{tr}(\mathrm{B}) \equiv \sum_{k=1}^{n} B_{kk}$ jest śladem macierzy B.

11. Pokazać, że dla macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

zachodzi

$$\exp\left(-\frac{1}{2} i\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = I\cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

dla dowolnego kąta ϕ i wektora jednostkowego $\vec{n}$.