Zestaw 5

1. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy $\hat{n}\cdot\vec{\sigma} \equiv n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$, gdzie $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ jest rzeczywistym wektorem o długości 1, a σ_1, σ_2 i σ_3 są macierzami Pauliego.

2. Korzystając z wzorów na elementy macierzowe $\langle jm' \mid \hat{X}_3 \mid jm\rangle$, $\langle jm' \mid \hat{X}_+ \mid jm\rangle$ oraz $\langle jm' \mid \hat{X}_- \mid jm\rangle$, gdzie $\hat{X}_\pm \equiv \hat{X}_1 \pm i\hat{X}_2$, znaleźć nieredukowalne reprezentacje macierzowe operatorów momentu pędu $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ i $\hat{X}_3$ w podprzestrzeniach niezmienniczych $j = \frac{1}{2}$, $j = 1$ i $j = \frac{3}{2}$. Przyjmujemy, że m' znaczy wiersze, a m kolumny.

3. Rozważyć elektron o spinie $s = \frac{1}{2}$ i orbitalnym momencie pędu $l = 1$. Wypisać wszystkie możliwe funkcje falowe tego elektronu dla określonego całkowitego krętu.

4. Pod wpływem obrotu funkcja falowa cząstki skalarnej, $\phi\left(\vec{r}, t\right)$, zmienia się zgodnie z przepisem:
$$\phi'\left(\vec{r}\,', t\right) = \phi\left(\vec{r}, t\right),$$
gdzie $\hat{R}$ jest operatorem obrotu w "zwykłej" trójwymiarowej przestrzeni, a $\vec{r}\,' \equiv \hat{R}\,\vec{r}$. Takie przekształcenie odpowiada działaniu pewnego operatora obrotu $\hat{U}_R$ zdefiniowanego równaniem:
$$\phi'\left(\vec{r}, t\right) = \hat{U}_R\,\vec{\phi}(\vec{r}, t)\,.$$
Wykonując infinitezymalny obrót, znaleźć postać operatora $\hat{U}_R$ i związane z nim generatory obrotu.

5. Rozważyć funkcję falową cząstki wektorowej $\vec{\psi}(\vec{r}, t\,) = \{\psi_1(\vec{r}, t\,), \psi_2(\vec{r}, t\,), \psi_3(\vec{r}, t\,)\}$. Pod wpływem obrotu zmienia się ona następująco:
$$\vec{\psi}\,'(\vec{r}\,', t) = \hat{R}\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \hat{R}\,\vec{\psi}(\hat{R}^{-1}\vec{r}\,', t)\,.$$
Takie przekształcenie odpowiada działaniu innego operatora obrotu $\hat{V}_R$ zdefiniowanego równaniem:
$$\vec{\psi}\,'(\vec{r}, t) = \hat{V}_R\,\vec{\psi}(\vec{r}, t)\,.$$
Wykonując infinitezymalny obrót, znaleźć postać tego operatora i związane z nim generatory obrotu. Z tych generatorów wydzielić część związaną z orbitalnym momentem pędu (patrz poprzednie zadanie) i pokazać, że pozostała (spinowa) część odpowiada cząstce o spinie 1.

6. Wydedukować na podstawie wyników poprzednich zadań, jak zmienia się przy obrotach funkcja falowa cząstki o spinie $\frac{1}{2}$, czyli spinor $\psi(\vec{r}, t\,) = \{\psi_1(\vec{r}, t\,), \psi_2(\vec{r}, t\,)\}$.

7. Zbudować kompletną macierz Wignera $D^{(1)}_{m'm}\left(\hat{R}\right)$, wychodząc z wzoru na $D^{(1/2)}_{m'm}\left(\hat{R}\right)$.

8. Elementy macierzy przejścia

$$T_{fi} \equiv \langle m_p\, m_d \mid T\,(E_\gamma, \theta_p) \mid m_\gamma\, m_{3He} \rangle$$

dla reakcji fotorozszczepienia ^{3}He na proton i deuteron, $\gamma +^3 \mathrm{He} \rightarrow p + d$ zależą od energii padającego fotonu (E_γ) oraz kąta wylotu protonu (θ_p) i zawierają informację o stanach spinowych wszystkich cząstek biorących udział w reakcji. Elementy macierzowe T_{fi} najwygodniej jest liczyć, przyjmując oś kwantyzacji $\hat{z}$ zgodną z kierunkiem padającego fotonu. W eksperymencie można jednak spolaryzować początkowy ^{3}He tak, by jego rzut na wybrany kierunek, zadany przez jednostkowy wektor $\hat{s} = (\sin\theta^* \cos\phi^*, \sin\theta^* \sin\phi^*, \cos\theta^*\,)$, był maksymalny, czyli równy $\frac{1}{2}$. Taki stan spinowy oznaczamy przez $|\, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_{\hat{s}}$. Dla $\theta^* = \pi/2$ i $\phi^* = 0$ zapisać stan spinowy $|\, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle_{\hat{s}}$ w postaci kombinacji liniowej stanów $|\, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_{\hat{z}}$ i $|\, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_{\hat{z}}$.