Zestaw 6

1. Korzystając z tablic współczynników Clebscha-Gordana (lub z programu *Mathematica*), policzyć dla $M = -\frac{1}{2}$ oraz $M = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}&\langle\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)1\left(1\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}M \mid \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)0\left(\frac{1}{2}0\right)\frac{1}{2}M\rangle\\ &\equiv \langle(j_1 j_2)\, J_{12}\, (J_{12} j_3)\, JM \mid j_1\, (j_2 j_3)\, J_{23}\, (j_1 J_{23})\, JM\rangle\,,\end{aligned}$$

gdzie nawiasy pokazują kolejne sprzężenia. Wskazówka: wyrazić oba stany przez stany iloczynowe $\mid \frac{1}{2}m_1\rangle \mid \frac{1}{2}m_2\rangle \mid \frac{1}{2}m_3\rangle$.

2. Policzyć na dwa sposoby zmianę harmoniki sferycznej $Y_{2,1}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ pod wpływem aktywnego obrotu R wokół osi $\hat{y}$ o kąt $\frac{\pi}{2}$ radianów. Sposób pierwszy:

$$Y'_{l,m}\,(\hat{r}\,) = Y_{l,m}\left(R^{-1}\hat{r}\,\right)\,,$$

gdzie $\hat{r} \equiv (\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3}\,)$. Sposób drugi, z wykorzystaniem macierzy D-Wignera $\mathcal{D}^l$ dla całkowitego l:

$$Y'_{l,m}\,(\hat{r}\,) = \sum_{m'=-l}^{l} \mathcal{D}^l_{m',m}\,(R)\; Y_{l,m'}\,(\hat{r}\,)$$

3. Znaleźć pierwszych sześć współczynników (c_0, c_1, ..., c_5) rozwinięcia na wielomiany Legendre'a $P_l(x)$ funkcji $f(x) = \sin(x^3) + \cos(x^6)$ określonej w przedziale $[-1, 1]$: $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\, P_l(x)$. Porównać wykres funkcji $f(x)$ z wykresem sumy $\sum_{l=0}^{5} c_l\, P_l(x)$.

4. Znaleźć wszystkie współczynniki c_{lm} dla $l \leq 6$ rozwinięcia na harmoniki sferyczne $Y_{lm}\,(\theta, \phi\,)$ funkcji określonej na jednostkowej sferze

$$f\,(\theta, \phi\,) = \sin\left(\theta^2\right)\,\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)\,\sin\left(\theta + \frac{1}{2}\phi^2\right) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\,\sum_{m=-l}^{l} c_{lm}\, Y_{lm}\,(\theta, \phi\,)\;.$$

Porównać wykres funkcji $f\,(\theta, \phi\,)$ z wykresem sumy $\sum_{l=0}^{6}\,\sum_{m=-l}^{l} c_{lm}\, Y_{lm}\,(\theta, \phi\,)$.