Zestaw 11

1. Zakładając niezmienniczość Galileusza, wewnętrzna funkcja falowa układu kilku nukleonów $\mid \psi \rangle$ zależy tylko od położeń lub pędów względnych, a nie zależy od położenia środka masy lub pędu całkowitego. W szczególności dla dowolnego układu dwóch cząstek o masach m_1 i m_2 zachodzi

$$\langle \vec{p}_1 \, \vec{p}_2 \mid \psi \rangle = \langle \vec{p} \, \vec{P} \mid \psi \rangle = \langle \vec{p} \mid \psi \rangle \, \delta^3 \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{P} \right) \,, \tag{1}$$

gdzie $\vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$ oraz $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.
Znaleźć elementy macierzowe $\langle \psi_f \, \vec{P}_f \mid j(1) \mid \psi_i \, \vec{P}_i \rangle$ i $\langle \psi_f \, \vec{P}_f \mid j(2) \mid \psi_i \, \vec{P}_i \rangle$ operatora pojedynczej cząstki $j(i)$ między stanami dwóch nukleonów o wewnętrznych funkcjach falowych $\mid \psi_i \rangle$ i $\mid \psi_f \rangle$ oraz pędach całkowitych $\vec{P}_i$ i $\vec{P}_f$. Operator pojedynczej cząstki spełnia z definicji:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1{}' \, \vec{p}_2{}' \mid j(1) \mid \vec{p}_1 \, \vec{p}_2 \rangle &= f \left(\vec{p}_1{}', \vec{p}_1 \right) \, \delta^3 \left(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2 \right) \,, \\ \langle \vec{p}_1{}' \, \vec{p}_2{}' \mid j(2) \mid \vec{p}_1 \, \vec{p}_2 \rangle &= f \left(\vec{p}_2{}', \vec{p}_2 \right) \, \delta^3 \left(\vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 \right) \,. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Stan układu związanego dwóch nukleonów (2N) czyli deuteronu z rzutem całkowitego momentu pędu m_d na wybraną oś kwantyzacji (powiedzmy oś z) można zapisać w reprezentacji fal parcjalnych w następujący sposób:

$$\mid \psi_d m_d \rangle = \int\limits_0^\infty dp p^2 \sum_{l=0,2} \mid p \alpha_l \rangle \, \varphi_l(p) \,, \tag{3}$$

gdzie $\mid p\alpha_l \rangle \equiv \mid p(ls)jm_d; tm_t \rangle$ oraz $s = j = 1$ i $t = m_t = 0$. Z drugiej strony ten sam stan deuteronu możemy przedstawić w tzw. postaci operatorowej:

$$\mid \psi_d m_d \rangle = \int d^3\vec{p} \mid \vec{p} \rangle \sum_{i=1,2} \phi_i(p) \, \hat{b}_i \left(\vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2 \right) \underbrace{\mid \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) 1 m_d \rangle}_{\text{spin 2N}} \underbrace{\mid \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) 00 \rangle}_{\text{izospin 2N}} \,, \tag{4}$$

gdzie p w równaniach (3) i (4) oznacza długość wektora pędu względnego $\vec{p}$, $\vec{\sigma}_i$ jest podwojonym operatorem spinu pojedynczego nukleonu, a operatory $\hat{b}_i \left(\vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2 \right)$ są zależnymi od pędu względnego operatorami działającymi w przestrzeni dwunukleonowych stanów spinowych:

$$\hat{b}_1 \left(\vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2 \right) = I_d \,, \quad \hat{b}_2 \left(\vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2 \right) = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}_1 \, \vec{p} \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{1}{3} \vec{p}^{\,2} I_d \,, \tag{5}$$

gdzie I_d jest operatorem identycznościowym.

   (a) Znaleźć warunek normalizacji dla $\varphi_l(p)$, wynikający z $\langle \psi_d m_d \mid \psi_d m_d \rangle = 1$.

(b) Znaleźć warunek normalizacji dla $\phi_i(p)$, wynikający z $\langle \psi_d m_d \mid \psi_d m_d \rangle = 1$.

(c) Znaleźć związki między funkcjami skalarnymi $\varphi_l(p)$ i $\phi_i(p)$, rozważając iloczyny skalarne $\langle p(ls)jm_d; tm_t \mid \psi_d m_d \rangle$, gdzie ket dany jest w postaci operatorowej.

(d) Skonstruować w programie *Mathematica* operatory składowych orbitalnego momentu pędu względnego w przstrzeni pędowej (L_x, L_y, L_z), operator kwadratu orbitalnego momentu pędu względnego w przstrzeni pędowej ($\hat{L}^2$), operator kwadratu spinu 2N ($\hat{S}^2$), operatory składowych całkowitego momentu pędu ($J_x = L_x + S_x$, $J_y = L_y + S_y$, $J_z = L_z + S_z$), oraz operator kwadratu całkowitego momentu pędu 2N ($\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S}$). Działając tymi operatorami na postać operatorową (4), wykazać, że dla dowolnych funkcji skalarnych $\phi_1(p)$ i $\phi_2(p)$ rzeczywiście przedstawia ona stan z "deuteronowymi" liczbami kwantowymi: $s = j = 1$, $j_z = m_d$.