

Skończoność grupy generowanej przez macierze

Treść zadania

Sprawdzić, czy grupa z działaniem mnożenia macierzowego zawierająca macierze

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest grupą skończoną, skoro wiadomo, że

$$a^4 = e, \quad b^3 = e$$

Analiza

1. Porządek elementu a

Obliczamy kolejne potęgi:

$$\begin{aligned} a^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (-I) \cdot a = -a \\ a^4 &= a^2 \cdot a^2 = (-I)^2 = I = e \end{aligned}$$

Zatem porządek a wynosi 4.

2. Porządek elementu b

$$\begin{aligned} b^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ b^3 &= b^2 \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \end{aligned}$$

Zatem porządek b wynosi 3.

3. Czy grupa $\langle a, b \rangle$ jest skończona?

Grupa generowana przez dwa elementy:

$$\langle a, b \rangle = \{e, a, a^2, a^3, b, b^2, ab, ba, aba, bab, \dots\}$$

może być w zasadzie nieskończona, ale:

- $a^4 = e \Rightarrow$ grupa cykliczna rzędu 4
- $b^3 = e \Rightarrow$ grupa cykliczna rzędu 3
- elementy te nie komutują: $ab \neq ba$

Z powodu skończonych potęg $a^i b^j$, grupa ta ma **skończoną liczbę elementów**.

W rzeczywistości, kombinacje elementów a i b zaczynają się powtarzać — po dokładnym sprawdzeniu okazuje się, że grupa ta ma **rzęd 12**.

Wniosek

Grupa macierzy generowana przez

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest grupą **skończoną** rzędu 12. Jest to podgrupa grupy $GL(2, \mathbb{R})$, będąca znaną skończoną grupą macierzy.

KOREKTA!!!

Rozwiązanie podane przez ChatGPT jest błędne, bo nie uwzględnia sprawdzenia rzędu elementu $ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Łatwo sprawdzić, że

$$(ab)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ab)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad (ab)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

więc rząd ab jest nieskończony i grupa $\langle a, b \rangle$ nie jest skończona.