

$$\exists e \in G \forall a \in G \quad ae = a$$

prawostronny
element neutralny

$$\forall a \in G \exists a^{-1} \in G \quad aa^{-1} = e$$

prawostronny
element odwrotny

Tw. 1

Dla każdego elementu a element a^{-1} jest także elementem lewostronnym

Dowód:

$$a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e, \text{ bo } a^{-1} \in G$$

$$(a^{-1}e)(a^{-1})^{-1} = e$$

$$a^{-1}e(a^{-1})^{-1} = e$$

$$a^{-1}a a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$$

$$a^{-1}a \underbrace{(a^{-1}(a^{-1})^{-1})}_e = e$$

$$a^{-1}a = e$$

Tw. 2

Element e jest także neutralnym elementem lewostronnym

Dowód:

$$ea = (a a^{-1})a = a(a^{-1}a) \stackrel{\text{Tw. 1}}{=} ae = a$$

Tw. 3

$$\forall a \in G \quad (a^{-1})^{-1} = a$$

Dowód:

$$(a^{-1})^{-1} a^{-1} = e \quad | \cdot a$$

$$(a^{-1})^{-1} a^{-1} a = ea$$

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Tw. 2, Tw. 3

Tw. 4

W grupie jest tylko jeden element neutralny

Dowód

Załóżmy, że e' też jest elementem neutralnym

$e' = e'e$, bo e jest elementem neutralnym

$e' = e'e = e$, bo e' też jest elementem neutralnym

Tw. 5

Każdy element grupy ma tylko jeden element odwrotny

Dowód:

Załóżmy, że zachodzi

$$ab = e \quad \text{oraz} \quad ac = e \xRightarrow{\text{Tw. 1}} ca = e$$

$$c = c(ab) = (ca)b = ea \xRightarrow{\text{Tw. 2}} a$$

$\uparrow$
Tożsamość

Tw. 6

$$\forall a, b \in G \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Dowód

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a \underbrace{bb^{-1}}_e a^{-1} = aa^{-1} = e,$$

wg Tw. 5 mamy $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Definicje

G, H - grupy

$f: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem,

jeśli $\forall a, b \in G \quad f(ab) = f(a)f(b)$

Dodatkowo,

iniekcję nazywamy monomorfizmem,

suriekcję nazywamy epimorfizmem,

bijekcję nazywamy izomorfizmem,

izomorfizm $G \rightarrow G$ nazywamy

automorfizmem

Jądro homomorfizmu

$$\text{Ker} f = \{ g \in G : f(g) = e_H \in H \}$$