

Wayktad III

I Lemmat Schura

$\hat{B} : U \rightarrow U$ jest operatorem liniowym w nieliniowej podprzestrzeni $U \subset V$ oraz $\forall g \in G \hat{B} T(g) = T(g) \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \lambda E$, gdzie E jest operatorem identyfikacyjnym

Dowód:

Niech $\vec{b}$ będzie wektorem własnym $\hat{B}$ do wartości własnej λ

$$\hat{B} \vec{b} = \lambda \vec{b}$$

$$\hat{B} (T(g) \vec{b}) = T(g) \hat{B} \vec{b} = \lambda (T(g) \vec{b}),$$

czyli $T(g) \vec{b}$ jest też wektorem własnym $\hat{B}$ do tej samej wartości własnej. Wektory własne rozpinają przestrzeń wektorową, która jest podprzestrzenią U . Jest ona zamknięta względem działania grupy w postaci operatorów $T(g)$, a więc jest G -modułem.

Teraz przejdziemy do nieredukowalności, co oznacza, że U nie może mieć właściwego podmodułu.

Jedynie dopuszczalne podmoduły to albo cały U , albo wektor $\vec{0}$.

Przypadek drugi (tylko $\vec{0}$) nie jest możliwy, bo każdy operator liniowy posiada przynajmniej jeden własny (niezerowy) wektor własny w reprezentacji macierkowej.

$$B\vec{b} = \lambda \vec{b}$$

$$\det(B - \lambda E) = 0$$

To ostatnie równanie ma przynajmniej jeden pierwiastek λ z odpowiadającym mu wektorem własnym $\vec{b}$.

Dlatego powstaje przypadek pierwszy, w którym wektory własne $\vec{B}$ do wartości własnej λ rozpinają cały U .

$$\vec{u} \in U \Rightarrow \vec{u} = \sum_i \mu_i \vec{b}_i$$

$$\begin{aligned} \hat{B}\vec{u} &= \sum_i \mu_i \hat{B} \vec{b}_i = \sum_i \mu_i \lambda \vec{b}_i = \\ &= \lambda \sum_i \mu_i \vec{b}_i = \lambda \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in U \end{aligned}$$

II Lemat Schura

w tym przypadku operator liniowy $\hat{B}$ jest odwzorowaniem

$\hat{B} : U \rightarrow U'$ między dwoma przestrzeniami wektorowymi U i U' , w których działają odpowiednie reprezentacje nieredukowalne $T(g)$ i $T'(g)$

$$\forall g \in G \quad \hat{B} T(g) = T'(g) \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \hat{O},$$

gdzie $\hat{O}$ jest operatorem liniowym, który odwzorowuje każdy wektor z U na wektor zerowy w U'

$$\forall \vec{u} \in U \quad \hat{O} \vec{u} = \vec{0}' \in U'$$

w dowodzie rozpatrujemy trzy przypadki

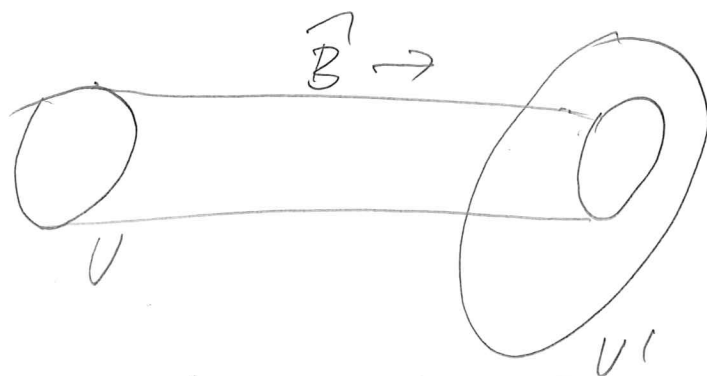
- (1) $n < n'$
- (2) $n > n'$
- (3) $n = n'$

$$(1) \quad n < n'$$

$$\vec{u} \in U$$

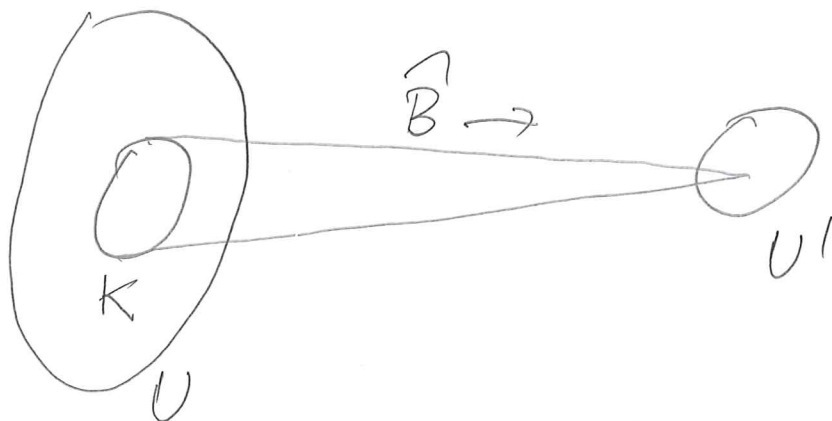
$$T'(g) \hat{B} \vec{u} = \hat{B} \underbrace{T(g) \vec{u}}_{\vec{u}' \in U} \in \hat{B} U = \text{Im } \hat{B}$$

$\text{Im } \hat{B}$ jest podmodulem U'



Ponieważ U' jest nieredukowalny, więc $\hat{B}U$ może być albo całym U' albo wektorem zerowym $\vec{0}'$. Nie może być całym U' , bo $n < n'$ i dlatego wynika $\hat{B}U, m$, nie może być większy niż n .
Oznacza to, że $m \leq n < n'$ i jedyną możliwością jest $\hat{B} = \vec{0}$

$$(2) \quad n > n'$$



Skupmy się na jędrze przekształcenia

42

$$K := \{ \vec{k} \in U : B \vec{k} = \vec{0}' \}$$

K jest podmodułem U , bo

$$\hat{B}(T(g)\vec{k}) = T'(g)\hat{B}\vec{k} = T'(g)\vec{0}' = \vec{0}',$$

co oznacza, że działanie dowolnego operatora $T(g)$ na dowolny wektor z K daje wektor z K .

U jest nieredukowalny, więc K jest albo całym U albo jedynym elementem K jest $\vec{0} \in U$.

K nie może być jednoelementowe:

wymiar U' jest mniejszy niż wymiar U , więc nie wystarczy nam wektorów $B\vec{e}_i$, $i=1,2,\dots,n$, mogą być liniowo niezależne

$$\sum_i \alpha_i B\vec{e}_i = \vec{0}', \text{ gdzie nie wystarczy}$$

α_i są jednocześnie równe zero.

Wynika stąd, że nietrywialna kombinacja liniowa, będąca nierównym wektorem w U , $\sum_i \alpha_i \vec{e}_i$ należy do K

$$\sum_i \alpha_i B\vec{e}_i = B\left(\sum_i \alpha_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}'$$

Statego $K=U$ i zachodzi

$$\forall \vec{u} \in U \quad \mathcal{B} \vec{u} = \vec{0}'$$

43

(3) $n=n'$

K jest także w tym przypadku podmodułem U , ale i tym razem K nie może być jednoelementowe ($\vec{0}$).

Gdyby tak było, to $\hat{\mathcal{B}}$ byłby odwzorowaniem bijectywnym:

$$\mathcal{B} \vec{u} = \mathcal{B} \vec{u}'$$

$$\mathcal{B}(\vec{u} - \vec{u}') = \vec{0}'$$

to może być tylko wektorem zerowym

$$\vec{u} - \vec{u}' = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}'$$

Wtedy istniałby operator odwrotny $\hat{\mathcal{B}}^{-1}$ i równanie

$$\hat{\mathcal{B}} T(g) = T'(g) \hat{\mathcal{B}}$$

można zapisać w postaci

$$T'(g) = \hat{\mathcal{B}} T(g) \hat{\mathcal{B}}^{-1},$$

co oznaczałoby wobec założenia równoważność reprezentacji T' i T .

Statego $K=U$ i zachodzi

$$\forall \vec{u} \in U \quad \hat{\mathcal{B}} \vec{u} = \vec{0}'$$

Fundamentalne twierdzenie

44

o ortogonalności

U_ν, U_μ — dwa G -moduły wyposazone
w niezerowowe reprezentacje
nie redukowalne

$\hat{A}$ — dowolny operator liniowy

$$A: U_\nu \rightarrow U_\mu$$

Budujemy operator

$$\hat{B} := \sum_g T^{(\mu)}(g) \hat{A} T^{(\nu)}(g^{-1})$$

(dla grup zwartych $\sum_g \rightarrow \int d\mu(g)$)

$$h \in G$$

$$\text{Policzmy } T^{(\mu)}(h) \hat{B} =$$

$$= \sum_g T^{(\mu)}(h) T^{(\mu)}(g) \hat{A} T^{(\nu)}(g^{-1}) =$$

$$= \sum_g T^{(\mu)}(hg) \hat{A} T^{(\nu)}(g^{-1})$$

$$hg = g', \quad g = h^{-1}g', \quad g^{-1} = g'^{-1}h$$

$$= \sum_{g'} T^{(\mu)}(g') \hat{A} T^{(\nu)}(g'^{-1}h) =$$

$$= \sum_{g'} T^{(\mu)}(g') \hat{A} T^{(\nu)}(g'^{-1}) T^{(\nu)}(h) \\ = \hat{B} T^{(\nu)}(h)$$

W takim razie $\hat{B}$ spełnia warunki II Lematu Schura, więc $\hat{B} = \vec{O}$,
chyba że $\mu = \nu$ i wtedy $\hat{B} = \lambda E$.

45

w postaci macierzowej

$$B := \sum_g D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

Wartości $\lambda_A^{(\mu)}$ zależą od macierzy A
i reprezentacji nieredukowalnej.

Do tej pory A była zupełnie dowolna.

Teraz weźmy A , której wszystkie
elementy macierzowe są równe zero

z wyjątkiem $A_{rs} = 1 \therefore A_{lm} = \delta_{lr} \delta_{ms}$

$$\lambda_A^{(\mu)} \rightarrow \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

$$\sum_{l,m} \sum_g D_{il}^{(\mu)}(g) A_{lm} D_{mj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}$$

$$\sum_g \sum_{l,m} D_{il}^{(\mu)}(g) \delta_{lr} \delta_{ms} D_{mj}^{(\nu)}(g^{-1}) =$$

$$= \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}$$

Bierzemy $\mu = \nu$ i liczymy ślad obu stron

46

$$\sum_i \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{si}^{(\mu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \underbrace{\sum_i \delta_{ii}}_{n_\mu}$$

$$\sum_g \underbrace{\sum_i D_{si}^{(\mu)}(g^{-1}) D_{ir}^{(\mu)}(g)}_{\text{mnożymy wiersze}} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

$$\sum_g \left(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g) \right)_{sr} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

$$D^{(\mu)}(g^{-1}g) = D^{(\mu)}(e) = \mathbb{I}_{n_\mu \times n_\mu}$$

$$\sum_g \delta_{sr} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

$$|G| \delta_{sr} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

$$\lambda_{rs}^{(\mu)} = \frac{|G|}{n_\mu} \delta_{rs}$$

Wziąć $\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}$

wzyc

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

$|G|$ to liczba elementów w grupie G

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs} \quad 47$$

ze względu na poprzednio uzyskane wyniki
można rozważać reprezentacje unitarne
bez żadnej straty ogólności.

Wówczas

$$D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \left(D_{sj}^{(\nu)}(g) \right)^{-1} = D_{js}^{(\nu)*}(g)$$

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

Skupmy się na jednej reprezentacji
nie redukowalnej, biorąc $\mu = \nu$.

Dla ustalonych i, r możemy

traktować $D_{ir}^{(\mu)}(g)$ jak $|G|$ -wymiarowy
wektor, a same po elementach
grupy jako iloczyn skalarny!

Każy z "wektorów" $D_{ir}^{(\mu)}(g)$
indeksowany jest parą (i, r) , jest
ich więc n_μ^2 .

To było dla reprezentacji (μ) .

To samo zachodzi dla każdej innej
reprezentacji nie redukowalnej.

Ł więc "wektory" z jednej
reprezentacji nie redukowalnej są
ortogonalne do "wektorów"
z innej reprezentacji nie redukowalnej.

Takich wektorów dla ustalonej grupy G nie może być dowolnie wiele;
ich liczba jest ograniczona
od góry przez liczbę elementów
w grupie

48

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 \leq |G|$$

Ponieważ $n_{\mu} \geq 1$ wynika stąd,
że liczba nieredukowalnych reprezentacji
skoncowanej grupy jest ściśle
ograniczona.

Charaktery

$$\chi(g) = \text{Tr}(D(g))$$

Własności

(1) Charakter jest ten sam
dla wszystkich reprezentacji
równoważnych

$$D'(g) = S D(g) S^{-1}$$

$$\text{Tr}(D'(g)) = \text{Tr}(S D(g) S^{-1}) =$$

$$= \text{Tr}(\underbrace{S^{-1} S} D(g)) = \text{Tr}(D(g))$$

(2) χ jest taki sam dla sprzężonych
elementów

$$D(hgh^{-1}) = D(h) D(g) D(h^{-1}) = \\ = D(h) D(g) (D(h))^{-1}$$

$$\text{Tr}(D(hgh^{-1})) = \text{Tr}(D(h) D(g) D^{-1}(h)) \\ = \text{Tr}(\underbrace{D^{-1}(h) D(h)}_{1} D(g)) = \text{Tr}(D(g))$$

(3) Jeśli D jest unitarna, to $D^{-1} = D^+$

$$\chi(g^{-1}) = \text{Tr}(D(g^{-1})) = \text{Tr}((D(g))^{-1}) \\ = \text{Tr}((D(g))^{\dagger}) = \chi^*(g)$$

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs} / \frac{\delta_{ir}}{\delta_{js}}$$

$$\sum_g \sum_{i,r} \sum_{j,s} \frac{D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g)}{\delta_{ir} \delta_{js}} = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \sum_{i,r} \sum_{j,s} \frac{\delta_{ij} \delta_{rs}}{\delta_{ir} \delta_{js}} \quad 50$$

$$\sum_g \sum_i \sum_j D_{ii}^{(\mu)}(g) D_{jj}^{(\nu)*}(g) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} n_\mu = |G| \delta^{\mu\nu}$$

$$\sum_{i,r} \sum_{j,s} \delta_{ij} \delta_{rs} \delta_{ir} \delta_{js} =$$

$$= \sum_i \sum_{j,s} \delta_{ij} \delta_{is} \delta_{js} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ij} = \sum_i \delta_{ii} = n_\mu$$

$$\sum_g \underbrace{\sum_i D_{ii}^{(\mu)}(g)}_{\chi^{(\mu)}(g)} \underbrace{\sum_j D_{jj}^{(\nu)*}(g)}_{\chi^{(\nu)*}(g)} = |G| \delta^{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)*}(g) = \delta^{\mu\nu}$$

Potraktujmy to wyrażenie jako iloczyn skalarny charakterów $\langle \chi^{(\nu)} | \chi^{(\mu)} \rangle$

$$\langle \varphi, \chi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_g \varphi(g) \chi(g^{-1})$$

wyprowadzić

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)*}(g) = \delta^{\mu\nu}$$

51

oznacza, że charakterzy nierównoważnych nieredukowalnych reprezentacji są ortogonalne.

Ponieważ charakterzy elementów sprzężonych grupy są równe, wszystkie elementy klasy sprzężenia K_i mają taki sam charakter

$$\frac{1}{|G|} \sum_i \overset{\substack{k \leftarrow \text{liczba klas} \\ \uparrow \\ \text{suma} \\ \text{po klasach}}}{k_i} \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = \delta^{\mu\nu}$$

liczba elementów
w klasie i

$\chi_i^{(\mu)}$ – charakter dla całej klasy i reprezentacji (μ)

Ten wzór oznacza relację ortogonalności wektorów $\chi_i^{(\mu)}$ w przestrzeni k -wymiarowej! Tych wektorów nie może być więcej niż k . Mamy kolejne ograniczenie na liczbę nierównoważnych reprezentacji r :

$$r \leq k$$

Norma pokazac (zobacz książka

M. Hamermesh, Group Theory and its Applications to Physical Problems, Addison-Wesley, § 3-7),
 że charaktery spełniające jeszcze
 jedną relację ortogonalności

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\mu} k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)*} = \delta_{ij}$$

To daje nierówność w drugim
 kierunku $\sigma \geq k$, więc ostatecznie

$$\boxed{\sigma = k}$$

Degeneracja

Rozważamy wartości własne i wektory własne hamiltonianu H_0 , który jest hermitowski względem grupy transformacji G

$$H_0 |E^{(0)}\rangle = E^{(0)} |E^{(0)}\rangle$$

$U(g)$ - operator unitarny indukowany w przestrzeni stanów przez działanie transformacji g

$$[H_0, U(g)] = 0$$

$$\begin{aligned} H_0 U(g) |E^{(0)}\rangle &= U(g) H_0 |E^{(0)}\rangle = \\ &= E^{(0)} U(g) |E^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

Oznacza to, że $U(g) |E^{(0)}\rangle$ jest także stanem własnym H_0 do wartości własnej $E^{(0)}$. Dlatego wektory własne należące do danej wartości własnej $E^{(0)}$ transformują się między sobą przy działaniu grupy, stanowiąc podmoduł w pełnej przestrzeni wektorów własnych i tworząc bazę reprezentacji G .

Musi istnieć tylko jeden wektor
własny do wartości własnej $E^{(0)}$;
w tym przypadku mówimy o braku
degeneracji. Reprezentacja jest
wtedy reprezentacja trywialna.

W wielu przypadkach mamy więcej
takich stanów własnych i taki
porism energetyczny nazywamy
zdegenerowanym. W tym przypadku
działanie grupy na przestrzeni
zdegenerowanych stanów
indukuje r -wymiarową reprezentację,
gdzie r to liczba zdegenerowanych
wektorów własnych.

Jeśli nie ma dodatkowych
symetrii (brak tw. przypadkowej
degeneracji), taka reprezentacja
jest nieredukowalna.

Dany porism energetyczny odpowiada
reprezentacji nieredukowalnej $D^{(\mu)}$
grupy G oraz r jest wymiarem $D^{(\mu)}$.
 $r = n_{\mu}$. Porism oznaczamy

$$E^{(0)} \rightarrow E_{\alpha\mu}^{(0)} \quad \alpha - \text{informacje} \\ \text{niezwiązana} \\ \text{z grupą } G$$

Znoszenie degeneracji

Dodatkowe oddziaływanie

$$H_0 \rightarrow H_I = H_0 + V$$

prawdopodobnie, że H_I jest niezmienny względem podgrupy H grupy G

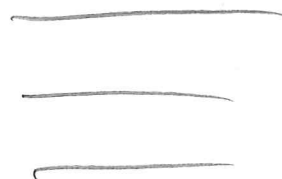
Nowe poziomy energetyczne są teraz klasyfikowane przez nieredukowalne reprezentacje H_I ! Jeśli elementy macierze V są małe w porównaniu z różnicami między poziomowymi energiami poziomów, możemy dostrzec podniesienie nowych poziomów

$E^{(0)}$

$E_{\beta\gamma}^{(0)}$



$E^{(1)}$



$E_{\alpha\mu}^{(0)}$



$E_{\alpha\sigma}^{(1)}$
 $E_{\alpha\sigma}^{(1)}$