

Przykłady działań z różnymi własnościami: przemienność i łączność

Zadanie

Zaproponować działanie, które:

- (a) nie jest ani przemienne, ani łączne,
- (b) jest przemienne, ale nie jest łączne,
- (c) jest łączne, ale nie jest przemienne.

Rozwiązanie

(a) Działanie, które nie jest ani przemienne, ani łączne

Weźmy zbiór $S = \{0, 1\}$ z działaniem $*$ określonym przez tabelę:

$*$	0	1
0	0	1
1	0	0

Sprawdzenie:

- Przemienność: $0 * 1 = 1 \neq 0 = 1 * 0$ – brak przemienności.
- Łączność: $(1 * 0) * 1 = 0 * 1 = 1$, ale $1 * (0 * 1) = 1 * 1 = 0$, więc działanie nie jest łączne. (Ten przypadek sam znalazłem, bo ChatGPT miał z tym problem (**JG**))

Uwagi: Działanie z tabeli jest nieprzemienne i niełączne.

(b) Działanie przemienne, ale niełączne

Weźmy zbiór $S = \{0, 1, 2\}$ z działaniem:

$$a * b = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } a = b, \\ 1, & \text{jeśli } a \neq b. \end{cases}$$

Sprawdzenie:

- Przemienność: tak, bo wartość zależy tylko od tego, czy argumenty są równe.
- Łączność: nie, np.

$$(1 * 2) * 0 = 1 * 0 = 1,$$

ale

$$1 * (2 * 0) = 1 * 1 = 0,$$

więc $(1 * 2) * 0 \neq 1 * (2 * 0)$.

(c) Działanie łączne, ale nieprzemienne

Klasycznym przykładem jest mnożenie macierzy o rozmiarze co najmniej 2×2 :

$$A * B = AB$$

Sprawdzenie:

- Łączność: $(AB)C = A(BC)$ – tak.
- Przemienność: zwykle nie, bo macierze nie muszą się przemieszczać. (ChatGPT miał na myśli, że macierze nie muszą komutować (**JG**))