

Czy wystarczy jednostronna jedynka i odwrotność w definicji grupy?

Problem

Czy można osłabić aksjomaty grupy i zażądać jedynie:

- istnienia **prawostronnego elementu neutralnego** oraz **prawostronnych odwrotności**, lub
- istnienia **lewostronnego elementu neutralnego** oraz **lewostronnych odwrotności**?

Odpowiedź

Tak, w obu przypadkach otrzymujemy pełną strukturę grupy, pod warunkiem, że działanie jest **łączne**.

Pełne aksjomaty grupy

Zbiór G z działaniem $\cdot$ jest grupą, jeśli:

1. **Łączność**: $\forall a, b, c \in G, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. **Element neutralny**: istnieje $e \in G$, że $\forall a \in G, \quad e \cdot a = a \cdot e = a$
3. **Element odwrotny**: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$, że $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Teza

Jeśli:

- działanie jest łączne,
 - istnieje $e \in G$, takie że $\forall a \in G : a \cdot e = a$ (prawa jedynka),
 - $\forall a \in G, \exists a' \in G : a \cdot a' = e$ (prawy odwrotny),
- to G jest grupą — tzn. zachodzą również lewostronna jedynka i lewostronne odwrotności.

Dowód (dla wersji prawostronnej)

Niech $a \in G$, oraz $a \cdot a' = e$ i $a \cdot e = a$. Chcemy pokazać, że:

$$(1) \ a' \cdot a = e \quad \text{oraz} \quad (2) \ e \cdot a = a$$

Ad (1): Pokażmy, że $a' \cdot a = e$

$a' \in G$, więc musi mieć element odwrotny, który oznaczamy a'' . Dlatego zachodzi

$$a' \cdot a'' = e.$$

Powyższą tożsamość możemy przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} e &= a' \cdot a'' = (a' \cdot e) \cdot a'' = [a' \cdot (a \cdot a')] \cdot a'' = \\ &= [(a' \cdot a) \cdot a'] \cdot a'' = (a' \cdot a) \cdot (a' \cdot a'') = (a' \cdot a), \end{aligned}$$

bo $a' \cdot a'' = e$. A zatem a' jest nie tylko odwrotnością prawostronną, ale także lewostronną.

Ad (2): Pokażmy, że $e \cdot a = a$

e jest jedynką prawostronną, więc

$$a \cdot e = a,$$

ale ponieważ $e = a' \cdot a$ mamy

$$a \cdot (a' \cdot a) = a.$$

Korzystając z łączności, dostajemy:

$$a = (a \cdot a') \cdot a = e \cdot a,$$

więc $a = e \cdot a$ i e jest nie tylko jedynką prawostronną, ale także lewostronną.

Dowód zaczerpnięty z podręcznika F. W. Byron, R. W. Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, tom 2, PWN, Warszawa 1975.

Wniosek

Przy założeniu łączności:

- Prawostronna jedynka + prawostronne odwrotności $\Rightarrow$ pełna struktura grupy
- Lewostronna jedynka + lewostronne odwrotności $\Rightarrow$ pełna struktura grupy