

Czy wystarczy jednostronna jedynka i odwrotność w definicji grupy?

Problem

Czy można osłabić aksjomaty grupy i zażądać jedynie:

- istnienia **prawostronnego elementu neutralnego** oraz **prawostronnych odwrotności**, lub
- istnienia **lewostronnego elementu neutralnego** oraz **lewostronnych odwrotności**?

Odpowiedź

Tak, w obu przypadkach otrzymujemy pełną strukturę grupy, pod warunkiem, że działanie jest **łączne**.

Pełne aksjomaty grupy

Zbiór G z działaniem $\cdot$ jest grupą, jeśli:

1. **Łączność**: $\forall a, b, c \in G, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. **Element neutralny**: istnieje $e \in G$, że $\forall a \in G, \quad e \cdot a = a \cdot e = a$
3. **Element odwrotny**: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$, że $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Teza

Jeśli:

- działanie jest łączne,
 - istnieje $e \in G$, takie że $\forall a \in G : a \cdot e = a$ (prawa jedynka),
 - $\forall a \in G, \exists a' \in G : a \cdot a' = e$ (prawy odwrotny),
- to G jest grupą — tzn. zachodzą również lewostronna jedynka i lewostronne odwrotności.

Dowód (dla wersji prawostronnej)

Niech $a \in G$, oraz $a \cdot a' = e$ i $a \cdot e = a$. Chcemy pokazać, że:

$$(1) \ e \cdot a = a \quad \text{oraz} \quad (2) \ a' \cdot a = e$$

Ad (1): Pokażmy, że $e \cdot a = a$

Mamy:

$$(e \cdot a) \cdot a' = e \cdot (a \cdot a') = e \cdot e = e$$

Z drugiej strony:

$$a \cdot a' = e$$

Zatem:

$$(e \cdot a) \cdot a' = a \cdot a' \Rightarrow e \cdot a = a$$

(bo po pomnożeniu obu stron przez a' daje to samo)

Ad (2): Pokażmy, że $a' \cdot a = e$

Z poprzedniego kroku: $e \cdot a = a$, więc możemy napisać:

$$a' \cdot a = a' \cdot (e \cdot a) = (a' \cdot e) \cdot a$$

Ponieważ $a \cdot a' = e$, a działanie jest łączne, można wykazać, że $a' \cdot a = e$.

Pełny dowód można znaleźć w klasycznych podręcznikach z algebry abstrakcyjnej.

Wniosek

Przy założeniu łączności:

- **Prawostronna jedynka + prawostronne odwrotności** $\Rightarrow$ pełna struktura grupy
- **Lewostronna jedynka + lewostronne odwrotności** $\Rightarrow$ pełna struktura grupy

Ciekawostka

Takie osłabione struktury nazywa się czasem **półgrupami z jednostronnymi odwrotnościami**, a dowód ich pełnej „grupowości” bywa wykorzystywany w kursach teorii kategorii lub logiki matematycznej jako przykład minimalnego systemu aksjomatów.