

Grupy rzędu 4: klasyfikacja, tabelki i diagramy Cayleya

Wstęp

Rozważamy grupy rzędu 4, czyli zbiory G z 4 elementami oraz działaniem spełniającym aksjomaty grupy. Pokażemy, że:

- Każda grupa rzędu 4 jest **abelowa** (czyli przemienna),
- Istnieją tylko **dwie nieizomorficzne** grupy rzędu 4:
 - cykliczna grupa C_4 ,
 - grupa Kleina $V_4 \cong C_2 \times C_2$ (niecykliczna, ale abelowa).

Dowód abelowości

Ponieważ $4 = 2^2$, każda grupa rzędu p^2 (gdzie p to liczba pierwsza) jest przemienna. To wynika z faktu, że takie grupy mają centrum równe całej grupie, a zatem są abelowe.

Przypadek 1: Grupa cykliczna C_4

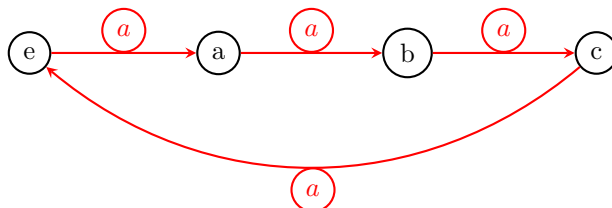
Opis:

- Grupa generowana przez jeden element a , taki że $a^4 = e$.
- Elementy: $G = \{e, a, a^2 = b, a^3 = c\}$.
- Jest cykliczna i abelowa.

Tabela Cayleya:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Diagram Cayleya:



Czerwone strzałki oznaczają mnożenie przez generator a . Diagram pokazuje, że cały zbiór generowany jest przez a , czyli grupa jest cykliczna.

Przypadek 2: Grupa Kleina V_4

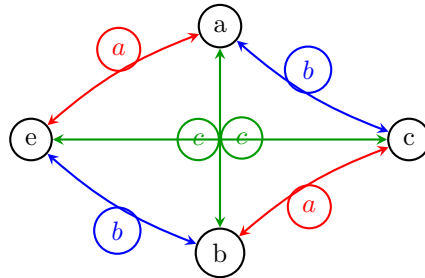
Opis:

- Elementy: $G = \{e, a, b, c\}$
- Każdy niejednostkowy element ma rząd 2: $a^2 = b^2 = c^2 = e$
- Relacje: $ab = c, \quad bc = a, \quad ca = b$
- Grupa jest abelowa, ale niecykliczna (żaden element nie generuje całej grupy)

Tabela Cayleya:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Diagram Cayleya:



Trzy różne kolory reprezentują mnożenie przez a , b , i c . Diagram pokazuje symetrię, ale brak cyklu — grupa nie jest cykliczna.

Wniosek

- Każda grupa rzędu 4 jest **abelowa**.
- Istnieją tylko dwie nieizomorficzne grupy rzędu 4:
 - Cykliczna: C_4
 - Niecykliczna: Grupa Kleina V_4
- Ich struktury można przedstawić zarówno tabelarycznie, jak i graficznie (diagramy Cayleya).