

Czy twierdzenie $(ab)^n = a^n b^n$ jest prawdziwe w każdej grupie?

Treść twierdzenia

Rozważmy następujące twierdzenie:

Jeśli G jest grupą oraz $a, b \in G$ i $n \in \mathbb{Z}$, to

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Odpowiedź

To twierdzenie **nie jest prawdziwe w ogólności**.

Kiedy twierdzenie jest prawdziwe?

Równanie

$$(ab)^n = a^n b^n$$

jest prawdziwe **tylko wtedy**, gdy grupa G jest **abelowa (przemienna)**, czyli:

$$ab = ba \quad \text{dla wszystkich } a, b \in G.$$

Przykład przeczący (kontrprzykład)

Weźmy grupę macierzy odwracalnych 2×2 z mnożeniem — ta grupa nie jest przemienna.

Niech:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obliczamy:

$$ab = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zatem:

$$ab \neq ba \Rightarrow \text{grupa nie jest przemienna}$$

Obliczmy teraz:

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ:

$$(ab)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = a^2 b^2$$

Równanie jest fałszywe w tym przypadku.

Podsumowanie

- W ogólnej grupie:

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{— fałsz}$$

- W grupie abelowej (przemiennej):

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{— prawda}$$