

Grupa $\{1, i, -1, -i\}$ z mnożeniem zespolonym

Teza

Udowodnić, że zbiór

$$G = \{1, i, -1, -i\}$$

tworzy grupę ze względu na mnożenie liczb zespolonych, a następnie zbudować tabelę mnożenia grupowego.

Dowód, że G jest grupą

Musimy sprawdzić, czy G spełnia cztery aksjomaty grupy:

1. Domknięcie

Dla każdego $a, b \in G$, $ab \in G$. Sprawdzając wszystkie możliwe kombinacje mnożenia, zauważamy, że wynik zawsze należy do G . Przykładowo:

$$i \cdot i = -1 \in G, \quad (-i) \cdot (-i) = -1 \in G, \quad i \cdot (-1) = -i \in G$$

Zatem działanie jest domknięte.

2. Element neutralny

Elementem neutralnym względem mnożenia jest liczba $1 \in G$, ponieważ:

$$\forall a \in G : \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

3. Istnienie elementów odwrotnych

Każdy element ma swój odwrotny w G :

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 1 \\ (-1)^{-1} &= -1 \\ i^{-1} &= -i \quad (\text{bo } i \cdot (-i) = 1) \\ (-i)^{-1} &= i \end{aligned}$$

4. Łączność

Mnożenie liczb zespolonych jest zawsze łączne, więc:

$$\forall a, b, c \in G : \quad (ab)c = a(bc)$$

Wniosek

Zbiór $G = \{1, i, -1, -i\}$ z mnożeniem zespolonym tworzy grupę.

Tabela mnożenia grupowego

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Ciekawostka

Grupa G jest cykliczna rzędu 4:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Można ją utożsamiać z grupą obrotów płaszczyzny zespolonej o kąty $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.