

Grupa macierzy diagonalnych rzędu 2 z mnożeniem

Treść zadania

Udowodnić, że zbiór macierzy

$$G = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

tworzy grupę względem mnożenia macierzy, a następnie zbudować tabelę mnożenia grupowego.

Dowód, że G jest grupą

Sprawdzimy cztery warunki grupy:

1. Domknięcie

Wszystkie macierze są diagonalne. Iloczyn dwóch macierzy diagonalnych to również macierz diagonalna:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

Wszystkie możliwe kombinacje iloczynów elementów z G również należą do G , więc działanie jest domknięte.

2. Element neutralny

Macierz $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jest jednostką w mnożeniu macierzy, czyli:

$$\forall A \in G : \quad e \cdot A = A \cdot e = A$$

3. Istnienie odwrotności

Każda macierz z G jest odwracalna, bo ma wyznacznik równy $\pm 1 \neq 0$. Dodatkowo:

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad c^{-1} = c, \quad e^{-1} = e$$

czyli wszystkie odwrotności są w G .

4. Łączność

Mnożenie macierzy jest zawsze łączne:

$$\forall A, B, C \in G : \quad (AB)C = A(BC)$$

Wniosek

Zbiór G z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę rzędu 4.

Tabela mnożenia grupowego

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Ciekawostka

Grupa G jest izomorficzna z grupą Kleina V_4 , która jest niecykliczną grupą abelową rzędu 4. Każdy element jest sam sobie odwrotny i przemnażanie jest przemienne.