

Czy podana tabela opisuje działanie grupowe?

Dane

Zbiór:

$$G = \{e, a, b, c, d, f\}$$

Działanie określone przez tabelę:

*	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>e</i>

Cel

Sprawdzić, czy powyższa tabela opisuje działanie grupowe, czyli czy $(G, *)$ jest grupą.

Kryteria

Aby $(G, *)$ było grupą, muszą być spełnione następujące warunki:

1. Zamkniętość
2. Istnienie elementu neutralnego
3. Istnienie elementów odwrotnych
4. Łączność

Analiza

1. Zamkniętość

Każdy wynik działania $x * y$ znajduje się w zbiorze G . Tabela jest domknięta.

2. Element neutralny

Z wiersza i kolumny odpowiadających elementowi e :

$$e * x = x * e = x \quad \text{dla każdego } x \in G$$

Zatem e jest elementem neutralnym.

3. Odwrotności

Z tabeli:

$$a * a = e \Rightarrow a^{-1} = a$$

$$b * b = e \Rightarrow b^{-1} = b$$

$$c * c = e \Rightarrow c^{-1} = c$$

$$c * c = e \Rightarrow c^{-1} = c$$

$$d * d = e \Rightarrow d^{-1} = d$$

$$f * f = e \Rightarrow f^{-1} = f$$

Każdy element ma odwrotność w zbiorze.

4. Łączność

Sprawdzamy wybrane przypadki.

Przypadek 1: $(b * d) * f \stackrel{?}{=} b * (d * f)$

$$b * d = a$$

$$a * f = c$$

$$d * f = a \Rightarrow (b * d) * f = c, \quad b * (d * f) = c$$

$$b * a = c$$

Przypadek 2: $(a * b) * c \stackrel{?}{=} a * (b * c)$

$$a * b = f$$

$$f * c = a$$

$$b * c = f \Rightarrow (a * b) * c = a, \quad a * (b * c) = c$$

$$a * f = c$$

Różne wyniki $\rightarrow$ brak łączności!

Wniosek

Tabela **nie** opisuje działania grupowego, ponieważ działanie **nie jest łączne**.