

Regresja klasyczna dla modelu  $y = a \cdot x$

Mamy do dyspozycji pary  $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, N$

Parametru  $a$  szukamy z warunkiem, by suma kwadratów  $\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2$  była minimalna.

$$f(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2$$

$$f'(a) = \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i)(-x_i)$$

$$f''(a) = \sum_{i=1}^N 2(-x_i)(-x_i) = 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 > 0$$

$$f'(\bar{a}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i y_i = \bar{a} \sum_{i=1}^N x_i^2 \Rightarrow \bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Po policzeniu  $\bar{a}$ , odchylenie standardowe wielkości  $y_i$  ( $S_y$ ) szacujemy wg wzoru:

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{a} x_i)^2$$

Mając do dyspozycji  $S_y$ , możemy policzyć niepewność (odchylenie standardowe  $\bar{a}$ )

$$S_{\bar{a}}^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 S_y^2, \text{ gdzie } \frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \text{ jest}$$

po pochodną  $\bar{a}$  po  $y_i$  licząc przy założeniu, że wielkości  $x_i$  i  $y_i$  traktujemy jak stałe

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^N x_j^2}$$

$$S_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^N x_j^2 \right)^2} S_y^2 \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) = \frac{S_y^2}{\sum_{j=1}^N x_j^2}$$

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2}}$$

$$\text{Uwaga: } f'(\bar{a}) = 0$$

$$f''(\bar{a}) > 0$$

oznacza, że rzeczywiście mamy minimum.

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{a} x_i)^2$$

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2}}$$

Regresja warianta dla modelu  $y = ax$

Mamy do dyspozycji trójki  $(x_i, y_i, s_i)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, N$ . Parametru  $a$  szukamy  
z warunkiem

$$\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2 \frac{1}{s_i^2} = \min$$

$$\frac{1}{s_i^2} = \frac{1}{s_{y_i}^2} \equiv w_i$$

$$f(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2 w_i$$

$$f'(a) = \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i)(-x_i)w_i$$

$$\begin{aligned} f''(a) &= \sum_{i=1}^N 2(-x_i)(-x_i)w_i = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 w_i > 0 \end{aligned}$$

$$f'(\bar{a}) = 0$$

$$\sum_i x_i y_i w_i = \bar{a} \sum_i x_i^2 w_i$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_i x_i y_i w_i}{\sum_i x_i^2 w_i}$$

Liczymy odchylenie standardowe  $\bar{a}$

$$S_{\bar{a}}^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 S_{y_i}^2$$

W tym wypadku odchylenia standardowe  $y_i$  mamy dane bezpośrednio

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N x_j^2 w_j} x_i w_i$$

$$S_{\bar{a}}^2 = \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^N x_j^2 w_j \right)^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \overbrace{w_i^2}^{w_i} S_{y_i}^2 =$$

$$= \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^N x_j^2 w_j \right)^2} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 w_i \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2 w_i}$$

$$S_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 w_i}}$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i w_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 w_i}$$

$$S_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 w_i}}$$